Structure galoisienne de la racine carrée de la codifférente d'extensions non abéliennes

Bouchaïb Sodaïgui
Université Polytechnique Hauts-de-France, INSA Hauts-de-France
Laboratoire CERAMATHS
Le Mont Houy, 59313 Valenciennes Cedex 9, France
E-mail : bouchaib.sodaigui@uphf.fr

Résumé

Soient k un corps de nombres et O_k son anneau d'entiers. Soit Γ un groupe fini d'ordre impair. Soient $\mathcal{M}$ un O_k-ordre maximal dans l'algèbre semi-simple $k[\Gamma]$ contenant $O_k[\Gamma]$, et $Cl(\mathcal{M})$ le groupe des classes des $\mathcal{M}$-modules localement libres. On désigne par $\mathcal{R}(\mathcal{A}, O_k[\Gamma])$ (resp. $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$) l'ensemble des classes c de $Cl(O_k[\Gamma])$ (resp. $Cl(\mathcal{M})$) telles qu'il existe une extension N/k modérément ramifiée, à groupe de Galois isomorphe à Γ, avec $[\mathcal{A}_{N/k}] = c$ (resp. $[\mathcal{M} \otimes_{O_k[\Gamma]} \mathcal{A}_{N/k}] = c$). Nous dirons que $\mathcal{R}(\mathcal{A}, O_k[\Gamma])$ (resp. $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$) est l'ensemble des classes galoisiennes réalisables par la racine carrée de la codifférente. Soient l, q deux nombres premiers impairs. Soit ξ_l (resp. ξ_q) une racine primitive p-ième (resp. q-ième) de l'unité. Premièrement, lorsque Γ est d'ordre l, sous l'hypothèse que $k/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\xi_l)/\mathbb{Q}$ sont linéairement disjointes, on montre que $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ est un sous-groupe de $Cl(\mathcal{M})$, par une description explicite utilisant un idéal de Stickelberger. Ensuite, on applique ce résultat au cas où Γ est un groupe métacyclique non abélien d'ordre lq ; sous l'hypothèse que $k/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\xi_l, \xi_q)/\mathbb{Q}$ sont linéairement disjointes, on définit un sous-ensemble de $Cl(\mathcal{M})$ (qu'on peut interpreter à l'aide de la notion d'extensions domestiques) par l'intermédiaire de deux idéaux de Stickelberger, et on montre qu'il est un sous-groupe de $Cl(\mathcal{M})$ contenu dans $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$. Enfin, on montre comment généraliser, de façon non explicite, le résultat précédent aux extensions métacycliques de degré lm, où m est un entier impair.