Introduction à la notion de Spineur de Dirac

Guy LAVILLE

Décembre 2007

Introduction

Cette présentation fait suite à celle de spineur de Pauli. Nous utiliserons les mêmes notations. Le point de vue est le même : le plus géométrique possible. Les objets de base sont élémentaires : scalaires, vecteurs, plans (c'est-à-dire bivecteurs), sous-espaces de dimension 3 (c'est-à-dire trivecteurs), espace tout entier.
Dans toute expression, nous devons voir immédiatement quel objet ou quelle superposition d'objets nous avons. Une conséquence de ce point de vue est de répondre à la question : les nombres complexes sont-ils indispensables en mécanique quantique ? Quelle signification géométrique peut-on attribuer à i ?
Les outils mathématiques adaptés à tout ceci sont évidemment les algèbres de Clifford.
Pour les spineurs de Pauli, nous avons vu que, dans $\mathbb{R}_{3,0}$ algèbre de Clifford, $\mathbb{C}$ est avantageusement remplacé par l'ensemble des scalaires et des pseudoscalaires i est remplacé par $e_1e_2e_3$ trivecteur représentant l'espace tout entier.
Si l'on tient compte de la relativité restreinte, $\mathbb{C}$ n'est pas géométriquement inclus. Nous pouvons soit le rajouter, soit considérer une dimension supplémentaire liée à la dualité particule-antiparticule.

Rappelons les notations générales dans les algèbres de Clifford :

si u est un vecteur $u_* = -u$ quels que soient a et b $(ab)_* = a_*\, b_*$
si u est un vecteur $\widetilde{u} = u$ quels que soient a et b $(ab)^\sim = \widetilde{b}\,\widetilde{a}$
$u^* = (u_*)^\sim$.

1. L'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{1,3}$

L'ensemble des matrices 4×4 à coefficients complexes sera noté $\mathbb{C}(4)$. C'est un espace vectoriel réel de dimension 32. Dans celui-ci, nous allons distinguer un sous-espace de dimension réelle 16.
Considérons les matrices de Dirac :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } j = 0,1,2,3$$

$$\gamma_0^2 = 1 \; ; \; \gamma_j^2 = -1 \;\text{ pour } j = 0,1,2,3 \; ; \quad \gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu \;\text{ pour } \mu \neq \nu.$$

L'algèbre engendrée par ces 4 matrices est une construction de l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{1,3}$. Celle-ci est associée à l'espace vectoriel euclidien de dimension 4 muni d'une forme quadratique de signature $+---$.
La situation est très différente à ce que nous avons eu pour $\mathbb{R}_{3,0}$, posons :

$$\gamma_- = \gamma_{0123} \quad \text{alors } \gamma_-^2 = -1.$$

Mais γ_- anticommute avec les γ_μ. Nous n'avons plus $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}_{1,3}$. De façon générale, trouver $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Clifford c'est trouver un élément i_- dans celle-ci tel que : pour tout a dans cet algèbre $ai_- = i_-a$ et $i_-^2 = -1$. On peut montrer que la seule possibilité c'est que i_- soit le pseudoscalaire et que ce pseudoscalaire possède les propriétés requises.
N'ayant pas les nombres complexes nous avons deux choix possibles algébriquement équivalents. Mais ils ne sont pas géométriquement équivalents.

2. Les nombres complexes et la mécanique quantique relativiste en signature $+---$

◇ Première possibilité : introduction des nombres complexes.
En multipliant les matrices de Dirac et les produits de matrices de Dirac par i nous obtenons $\mathbb{R}_{1,3} \oplus i\ \mathbb{R}_{1,3}$ c'est $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{1,3}$. Elles sont algébriquement isomorphes à $\mathbb{C}(4)$. Mais on ne voit plus automatiquement la géométrie sous-jacente, par exemple, où sont les vecteurs ?

◇ Deuxième possibilité : introduction d'une dimension supplémentaire.
Considérons la matrice 4×4 à coefficients complexes $\gamma_5 = i\ \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\gamma_5^2 = 1$, γ_5 anticommute avec $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Nous obtenons l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{2,3}$. Elle est construite sur l'espace vectoriel de dimension réelle 5 muni de la forme quadratique $++---$. Nous pouvons prendre la base :

$$e_j = \gamma_j \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3, \quad e_4 = \gamma_0, \quad e_5 = \gamma_5$$
$$e_j^2 = -1, \quad e_4^2 = 1, \quad e_5^2 = 1.$$

Nous avons ajouté une "dimension temporelle".
Dans $\mathbb{R}_{2,3}$ on a de façon naturelle $\mathbb{C}$: posons

$$i_- = e_4e_5e_1e_2e_3.$$

Alors $i_-^2 = -1$ et i_- commute avec tous les éléments de $\mathbb{R}_{2,3}$.

3. Les nombres complexes et la mécanique quantique relativiste en signature $+++-$

Considérons l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{4,1}$ de base anticommutante e_1, e_2, e_3, e_4, e_0 avec $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = 1$, $e_0^2 = -1$.
Définissons l'application φ :

$$\varphi : \mathbb{R}_{1,3} \ \rightarrow \ \mathbb{R}_{4,1}$$

$$\varphi(\gamma_\mu) = e_4e_\mu = -e_\mu e_4 \quad \text{pour} \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Nous avons $\varphi(1) = \varphi(\gamma_0^2) = \varphi(\gamma_0)^2 = e_4e_0e_4e_0 = 1$.
Ensuite φ est prolongé par linéarité à tout $\mathbb{R}_{1,3}$.
Posons $\varphi(\gamma_5) = -e_4$. En identifiant les γ à leurs matrices nous obtenons un homomorphisme d'algèbres :

$$\varphi : \mathbb{C}(4) \ \longrightarrow \ \mathbb{R}_{4,1}.$$

φ ne respecte pas la géométrie : les vecteurs (les points) de $\mathbb{R}_{1,3}$ ont pour image des bivecteurs (les plans).
Posons : $i_- = e_{01234}$.
Alors $i_-^2 = -1$ et i_- commute avec tous les éléments de $\mathbb{R}_{4,1}$. Le corps $\mathbb{C}$ peut être identifié aux scalaires et pseudoscalaires :

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}_{4,1}^0 \oplus \mathbb{R}_{4,1}^5$$
$$a + ib \rightarrow a + i_-b \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

Nous pouvons vérifier que le $i \in \mathbb{C}$ considéré comme élément de $\mathbb{C}(4)$ est tel que :

$$\varphi(i) = i_-$$

puisque nous avons :

$$-e_4 = \varphi(\gamma_5) = \varphi(i\gamma_{0123}) : \varphi(i)\ e_{0123}$$
$$-1 = \varphi(i)i_-.$$

4. Choix d'une direction spatiale arbitraire : les spineurs de Dirac

La direction e_4 est très particulière. Nous verrons qu'elle est représentative de la dualité particule-antiparticule. La direction e_0 est aussi particulière, elle représente le "temps d'un observateur". Choisissons une direction spatiale arbitraire et prenons le repère e_1, e_2, e_3 avec e_3 donnant cette direction. Définissons l'élément :

$$f = \frac{1}{2}\,(1 + e_3)\,\frac{1}{2}\,(1 + e_{04}).$$

Définition.- On appelle spineur de Dirac un élément de l'idéal $S = \mathbb{R}_{4,1} f$.
Remarquons que f est invariant par les produits :

$$e_3\, f = f, \quad e_{04}\, f = f, \quad e_{034}\, f = -f.$$

De plus f est un projecteur : $f^2 = f$.
Base de l'espace vectoriel complexe de dimension 4 :

$$f, \quad f_1 = e_1\, f = e_{13}\, f, \quad f_0 = e_0\, f = e_{03}\, f, \quad f_{01} = e_{01}\, f.$$

Matriciellement :

$$\varphi^{-1}(f) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{035})\,\frac{1}{2}\,(1 + \gamma_0) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)\,\frac{1}{2}\,(1 + i\gamma_{12})$$
$$\varphi^{-1}(f_1) = -\gamma_{13}\,\varphi^{-1}(f)\ ; \quad \varphi^{-1}(f_0) = -\gamma_{03}\,\varphi^{-1}(f)\ ; \quad \varphi^{-1}(f_{01}) = -\gamma_{01}\,\varphi^{-1}(f).$$

De façon explicite :

$$\varphi^{-1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \varphi^{-1}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \varphi^{-1}(f_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;$$
$$\varphi^{-1}(f_{01}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les spineurs sont utilisés pour représenter un électron ou un positron avec son spin :

spineur	énergie	spin
f	$+$	$\uparrow$
f_1	$+$	$\downarrow$
f_0	$-$	$\uparrow$
f_{01}	$-$	$\downarrow$

5. Endomorphismes sur l'espace vectoriel des spineurs de Dirac

L'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{4,1}$ peut s'identifier à l'ensemble des endomorphismes de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Effectuons quelques calculs explicites :

	f	f_1	f_0	f_{01}	changements
e_3	f	$-f_1$	$-f_0$	f_{01}	
e_{04}	f	f_1	$-f_0$	$-f_{01}$	
e_{034}	$-f$	f_1	f_0	$-f_{01}$	aucun
e_{12}	$i_- f$	$-i_- f_1$	$-i_- f_0$	$i_- f_{01}$	
e_{123}	$i_- f$	$i_- f_1$	$i_- f_0$	$i_- f_{01}$	
e_0	f_0	f_{01}	$-f$	$-f_1$	énergie
e_4	$-f_0$	f_{01}	$-f$	f_1	
e_1	f_1	f	$-f_{01}$	$-f_0$	spin
e_2	$i_- f_1$	$-i_- f$	$-i_- f_{01}$	$-i_- f_0$	

6. Equation de Dirac

Il est impossible d'écrire l'équation de Dirac en utilisant uniquement les matrices γ (c'est-à-dire dans le formalisme $\mathbb{R}_{1,3}$). Il faut utiliser $\mathbb{C}$, c'est-à-dire $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{1,3}$ ou de façon équivalente $\mathbb{C}(4)$

$$\sum_{\mu=0}^{3} (i\ \partial_\mu - e\ A_\mu)\gamma_\mu\ g = mg.$$

Nous pouvons l'écrire sous forme d'une équation d'évolution (forme Hamiltonienne)

$$i\ \partial_0\ g + \Big(\sum_{j=1}^{3} \big(i\ \partial_j - e\ A_j\big)\gamma_0\gamma_\mu - e\ A_0 \Big)\ g = m\ \gamma_0\ g$$
$$i\ \partial_0\ g = \Big(- i \sum_{j=1}^{3} \partial_j + eA_j \Big)\alpha_j\ g + e\ A_0\ g + m\ \beta g$$

avec $\alpha_j = \gamma_0\gamma_j$, $\beta = \gamma_0$.

Utilisons l'application φ : $\varphi(\alpha_j) = -e_0 e_j$, $\varphi(\beta) = e_0 e_4$.
La première forme de l'équation de Dirac donne dans $\mathbb{R}_{4,1}$:

$$\sum_{\mu=0}^{3} \big(i_-\ \partial_\mu - e\ A_\mu\big)\ e_4 e_\mu\ F = mF$$
$$\sum_{\mu=0}^{3} \big(\partial_\mu + e i_-\ A_\mu\big)\ e_\mu\ F = -i_-\ e_4\ mF = -e_{0123} mF.$$

La forme Hamiltonienne donne :

$$i_-\ \partial_0\ F = \sum_{j=1}^{3} \big(i_-\ \partial_j - eA_j\big)\ e_0 e_j F - e\ A_0\ F - e_{04}\ mF.$$

7. Transformations classiques dans $\mathbb{R}_{4,1}$

Etudions les transformations PCT

P parité, renversement du signe des vecteurs de l'espace 3D.
C conjugaison de charge, renversement du signe des charges
T renversement du signe du temps.

Indiquons dans le tableau ci-dessous, uniquement les vecteurs qui changent de signe, les autres vecteurs étant invariants.

P Parité	T Renversement du temps	C conjugaison de charge
$e_j \to -e_j$ pour $j = 1, 2, 3$	$e_0 \to -e_0$	$e_4 \to -e_4$

P, C, T sont des homomorphismes de l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{4,1}$ (donc respectent la géométrie).
Le théorème PCT, composition des trois transformations est une évidence :

$$PCT(a) = a_*.$$

Restreintes à $\mathbb{R}^0_{4,1} \oplus \mathbb{R}^5_{4,1} \simeq \mathbb{C}$, les transformations C et T deviennent la conjugaison complexes. Du point de vue des spineurs CT conserve e_{04}. Il n'y a pas de distinctions entre un positron et un électron qui remonte le temps.

8. Tableau de correspondance

Attention : une même opération peut être représentée de plusieurs façons : la conjugaison de charge est un bel exemple.

Opérations dans $\mathbb{C}(4)$ ou dans $\mathbb{R}_{1,3}$	Opérations dans $\mathbb{R}_{4,1}$	Signification géométrique
	$a \longrightarrow a_*$	symétrie par rapport à l'origine
$M \to \gamma_0\ M^+\gamma_0^{-1}$ $u \to \gamma_{123}\ \widetilde{u}\ \gamma_{123}^{-1}$	$a \to e_{123}\ \widetilde{a}\ e_{123}^{-1}$	Renversement du temps et conjugaison de charge adjoint de Dirac
	$a \to a^{\sim}$	
$M \to \gamma_0\ M\ \gamma_0^{-1}$ $u \to \gamma_0\ u\ \gamma_0^{-1}$	$a \to e_{04}\ a_*\ e_{04} = e_{123}a\ e_{123}$	Parité = réflexion de l'espace 3D
$M \to i\gamma_2\gamma_0 M(i\gamma_2\gamma_0)^{-1}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}_{1,3}$	$a \to e_4 a_* e_4 = e_{0123} a_* e_{0123}$	conjugaison de charge
$M \to i\ \gamma_1\gamma_3 M(i\ \gamma_1\gamma_3)^{-1}$	$a \to e_0\ a\ e_0$	Renversement du temps
$M \to {}^tM$ $u \to \gamma_{13}\ \widetilde{u}\ \gamma_{13}^{-1}$	$a \to e_{134}\ \widetilde{a}\ e_{134}^{-1}$	Renversement du temps et du vecteur e_2
$M \to M^*$ (conjuguée complexe) $u \to \gamma_2\ u\ \gamma_2$	$a \to -e_2\ a\ e_2$	Réflexion à travers le 4-plan orthogonal à e_2
$M \to M^t$ (transposée et conjuguée complexe) $u \to \gamma_{025}\ \widetilde{u}\ \gamma_{025}^{-1}$	$a \to -a^*$	
trace $1/4\ \mathrm{tr}(M)$ partie scalaire $< u >_0$	$a \to < a >_0$ partie scalaire	