Université de Caen
2017-2018

Notes sur la

Théorie de Serre-Bass

par
Ndèye Coumba SARR

1 Arbres

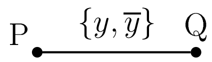
1.1 Graphes

Définition 1.1 (Graphe)**.** Un **graphe** Γ est la donnée :

1. d'un ensemble de **sommets** $X = \mathrm{som}\Gamma$;
2. d'un ensemble d'**arêtes** $Y = \mathrm{ar}\Gamma$;
3. et de deux applications
$$Y \to X \times X, \quad y \mapsto (o(y), t(y))$$
et
$$Y \to Y, \quad y \mapsto \overline{y}$$
qui satisfont à la condition suivante : pour tout $y \in Y$, on a $\overline{\overline{y}} = y$, $\overline{y} \neq y$, et $o(y) = t(\overline{y})$.

Un graphe est généralement représenté par un diagramme. Les sommets sont représenté par un point et une ligne correspond à un ensemble d'arêtes de la forme $\{y, \overline{y}\}$.

Exemple 1.2 (à parfaire)**.** Le graphe ayant deux sommets P et Q et deux arêtes y et $\overline{y}$, avec $P = o(y)$ et $Q = t(y)$ est représenté par le dessin.



Définition 1.3 (Morphisme de graphe)**.** Soient deux graphes Γ et Γ'. On appelle **(homo)morphisme de graphe** de Γ dans Γ' toute application f : $\mathrm{som}\Gamma \to \mathrm{som}\Gamma'$ qui envoie les sommets de Γ sur ceux de Γ' telle que : $\forall\ [P, Q] \in \mathrm{ar}\Gamma$, $[f(P), f(Q)] \in \mathrm{ar}\Gamma'$, et pour tout $y\mathrm{ar}\Gamma$ f(o(y))=o(f(y)) ; f(t(y))=t(f(y)) ; $f(\overline{y}) = \overline{f(y)}$.

Les graphes munis des morphismes de graphes forment un catégorie au sens de la théorie des catégorie.

Définition 1.4 (Orientation ; graphe orienté)**.** Une **orientation** d'un graphe est une partie Y_+ de $Y = \mathrm{ar}\Gamma$ telle que Y soit réunion disjointe de Y_+ et de $\overline{Y}_+$. Il est existe toujours. Un **graphe orienté** est défini, à isomorphisme près, par la donnée de deux ensembles X et Y_+ et d'une application $Y_+ \to X \times X$.

Réalisation d'un graphe

Soit $\Gamma = (X, Y)$ un graphe. Formons l'espace topologique T somme disjointe de X et de $Y \times [0, 1]$, où X et Y sont munis de la topologie discrète. Soit R la relation d'équivalence la plus fine sur T pour laquelle $(y, t) \equiv (\overline{y}, 1 - t)$, $(y, 0) \equiv o(y)$ et $(y, 1) \equiv t(y)$ pour $y \in Y$ et $t \in [0, 1]$. L'espace quotient $\mathrm{real}(\Gamma) = T/R$ s'appelle la réalisation du graphe Γ.

Définition 1.5 (Chemin)**.** Soit $n \geq 0$ un entier. Considérons le graphe orienté Ch_n donné par la concaténation d'arêtes $[i, i+1]$, $0 \leqslant i < n$, avec $o([i, i+1]) = i$ et $t([i, i+1]) = i+1$.
Il a $n+1$ sommets $0, 1 \cdots, n$ et n arêtes.
On appelle **chemin** de longueur n dans un graphe Γ tout morphisme $c : \mathrm{Ch}_n \to \Gamma$.

Définition 1.6 (connexité)**.** Un graphe est dit **connexe** si deux sommets quelconques sont les extrémités d'au moins un chemin. Les sous-graphes connexes maximaux (pour la relation d'inclusion) s'appellent les composantes connexes du graphe.

Définition 1.7 (Circuit)**.** Soit $n \geq 1$ un entier. Considérons le graphe orienté Cir_n donné par la concaténation d'arêtes $[i, i+1]$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $o([i, i+1]) = i$ et $t([i, i+1]) = i+1$. L'ensemble de sommets est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On appelle **circuit** de longueur n dans un graphe tout sous-graphe isomorphe à Cir_n.
Un tel graphe est défini par un chemin $(y_1, \cdots, y_n)$ sans aller-retour tel que les $P_i = t(y_i)$ $(1 \leq i \leq n$ soient distincts, et tel que $P_n = \mathrm{o}(1)$.

Un circuit de longueur 1 s'appelle un **lacet**.

Graphes combinatoires Soit Z un CW-complexe de dimension 1, alors on peut naturellement lui associer un graphe en prenant les 0-cellules comme les sommets et les 1-cellules comme l'ensemble des paires d'arêtes. Clairement, ce graphe n'a pas de circuits de longueur 1 ou 2. Ce complexe Z s'appelle la **réalisation géométrique** du graphe correspondant. Les extrémités d'une y détermine l'ensemble $\{y, \overline{y}\}$. Donc pour toute arête y, on peut considérer la paire d'arêtes $\{y, \overline{y}\}$ comme étant une arête géométrique.

Définition 1.8 (graphe combinatoire)**.** Un graphe est dit **combinatoire** s'il ne possède pas de circuit de longueur plus petite ou égale à 2.

Lemme 1.9. *Un graphe est un graphe combinatoire si et seulement si il est isomorphe à un graphe qui provient d'un CW-complexe de dimension 1.*

Démonstration. Si un graphe est isomorphe à un graphe qui ne possède pas de circuit de longueur 1 ou 2 alors le graphe d'origine lui même possède la même propriété. Pour un tel graphe, on peut considérer la réalisation géométrique correspondante comme étant l'ensemble X des sommets du graphe (les 0-cellules), et 1-cellules comme évidemment l'ensemble des parties $\{P, Q\}$ où P et Q sont liés ou $P = Q$. □

Le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$
Soit G un groupe et soit S une partie de G. On note $\Gamma(G, S)$ le graphe orienté ayant G pour ensemble de sommets, $G \times S = (\mathrm{ar}\Gamma)_+$ pour orientation, avec

$$\mathrm{o}(g, s) = g \text{ et } \mathrm{t}(g, s) = gs, \text{ pour toute arête } (g, s) \in G \times S.$$

La multiplication à gauche par les éléments de G définit une opération de G sur Γ qui conserve l'orientation. De plus G opère librement sur les sommets et les arêtes.

Proposition 1.10. *Soit $\Gamma(G, S)$ le graphe défini par un groupe G et une partie S de G.*

i. *Γ est connexe si et seulement si S engendre G.*

ii. Γ *contient un lacet si et seulement si* 1 *appartient à* S.

iii. Γ *est un graphe combinatoire si et seulement si* $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

Démonstration. i. ($\Rightarrow$) Supposons Γ connexe. Soit g quelconque dans G alors il existe un chemin c de Ch_n dans Γ, d'extrémités l'élément neutre e_G de G et g, i.e. $c(0) = e_G$ et $c(n) = g$. Dans ce cas $g = c(n) = s_1 s_2 \cdots s_n$. D'où G est bien engendré par S.
($\Leftarrow$) On suppose que $G = \langle S \rangle$. Soient g et g' deux sommets quelconques de Γ. On a un chemin c_1 d'origine e_G et de somme terminal g et on a aussi un autre chemin c_2 de g' à $e - G$. La concaténation de ces deux chemins nous donnent bien un chemin de g à g'

ii. Γ contient un lacet alors il existe un sous-graphe Γ' isomorphe à Cir_1. Notons α cet isomorphisme, α envoie 0 sur le sommet g de Γ'. Si (g, s) est l'arête de Γ' avec $s \in S$ alors $g = gs$, d'où $s = 1$.

□

1.2 Arbres

Définition 1.11 (Arbre)**.** Un arbre est un graphe connexe, non vide, sans circuit. En particulier un arbre est un graphe combinatoire.

Géodésiques dans un arbre

Définition 1.12 (Géodésique)**.** Une géodésique dans un arbre est un chemin sans aller-retour i.e $y_{i+1} \neq \overline{y}_i$.

Proposition 1.13. *Soient* P *et* Q *deux sommets d'un arbre* Γ. *Il existe une et une seule géodésique* $y_1 \cdots y_n$ *de* P *à* Q. *De plus, tous les sommets* $o(y_i)$ *sont distincts.*

Démonstration. Comme Γ est connexe et sans circuit alors il existe une géodésique de P à Q. Soit $y_1 \cdots y_n$ une géodésique telle que $o(y_i) = o(y_j)$ avec $i < j$, alors le chemin $y_i \cdots y_{j-1}$ est un circuit car $o(y_i) = t(y_{j-1})$ ce qui contredit le fait que Γ est un arbre.
Unicité : Soient $(y_1 \cdots y_n)$ et $z_1 \cdots z_m$ deux géodésiques de P à Q alors le chemin $(y_1 \cdots y_n \overline{z_m} \cdots \overline{z_1})$ est un circuit non trivial en P si $y_n \neq z_m$. Par récurrence, on en déduit que $n = m$ et $y_i = z_i$ pour tout i. □

Définition 1.14 (distance)**.** La distance $l(Q, P)$ entre deux sommets P et Q d'un arbre est la longueur n de la géodésique $y_1, \cdots y_n$ de P à Q.

Arbres et systèmes projectifs

On se donne un arbre Γ et un sommet $P \in X(\Gamma)$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $X_n(P)$ l'ensemble des sommets Q de Γ tels que $l(P, Q) = n$. On a $X_0(P) = P$.
Si $Q \in X_n$, avec $n \geqslant 1$, il existe un et un seul sommet Q' à une distance $< n$ de P auquel Q est lié. C'est le sommet $o(y_n)$ où $(y_1, \cdots y_n)$ est la géodésique de P à Q.
Il existe donc une application $f_{n,P} : X_n(P) \to X_{n-1}(P)$ qui envoie Q sur Q'. Et les ensembles $X_n(P)$ forment un système projectif $X_n(P) \xrightarrow{f_{n,P}} X_{n-1}(P) \xrightarrow{f_{n-1,P}} X_{n-2}(P) \to \cdots \to X_1 \to X_0(P) = P$.
Et la réunion des X_n pour tout n nous donne l'ensemble des sommets de cet arbre Γ. Toutes les paires d'arêtes $(y, \overline{y})$ de Γ peuvent être reconstituées à partir de ce système projectif comme étant

les paires $\{Q, f_{n,P}(Q)\}$ pour $n \geqslant 1$ et $Q \in X_n$.

Sous-arbres engendrés par un ensemble de sommets

Soit Γ un arbre et X' une partie de $X = \mathrm{som}\Gamma$. Tout sous-arbre Γ' de Γ contenant X' contient les géodésiques d'extrémités dans X'. Inversement les sommets et les arêtes de ces géodésiques constitue un sous-arbre Γ' de Γ contenant X' ; c'est le sous-arbre engendré par X'...

Réalisation d'un arbre

Si P et Q sont des sommets d'un arbre Γ, alors le sous-arbre $\Gamma(P,Q)$ engendré par l'ensemble $(\{P,Q\}$ est isomorphe à Ch_n où $n = l(P,Q)$ et a une réalisation géometrique homéomorphe à l'intervalle $[0,n]$. Comme un intervalle est contractile et puisque la réalisation de Γ $\mathrm{real}(\Gamma)$ est la réunion des réalisation des sous-arbres de la forme $\Gamma(P,Q)$ P et Q variant dans X, il s'en suit que la réalisation de tout arbre est un espace contractile.

Sommets terminaux Soit Γ un graphe,, $P \in X$, on définit le graphe $\Gamma - P$ comme étant le graphe obtenu en supprimant P de l'ensemble des sommets X et en supprimant de Y toutes les arêtes qui ont P pour origine ou sommet terminal. Si on note Y_P l'ensemble des arêtes y tel que $t(y) = P$ alors $\Gamma - P = [(X \setminus P), Y \setminus \left\{Y_P \cup \overline{Y}_P\right\}]$.

Définition 1.15. Le cardinal de Y_p s'appelle l'**indice** de P. Si $n = 0$, on dit que P est **isolé**, (si Γ est connexe ce n'est possible que si $X = \{P\}$, $Y = \{\emptyset\}$). Si $n \leqslant 1$ on dit que P est une **somment terminal**.

Proposition 1.16. *Soit P un sommet terminal non isolé d'un graphe Γ (i.e sommet terminal d'une unique arête).*

1. *Γ est connexe si et seulement si $\Gamma - P$ est connexe.*
2. *Tout circuit de Γ est contenu dans $\Gamma - P$.*
3. *Γ est un arbre si et seulement si $\Gamma - P$ est un arbre.*

Démonstration. 1. Comme une unique arête y a pour sommet terminal P, alors l'ensemble des arêtes de $\Gamma - P$ est $Y \setminus \{y, \overline{y}\}$. D'où 1.
2. Un sommet d'un circuit est d'indice supérieure ou égale à 2 donc est différent de P, donc tout circuit de Γ est dans $\Gamma - P$.
3. Résulte de 1. et 2.

$\square$

Soit Γ un graphe non vide. L'ensemble des sous graphes de Γ qui sont des arbres, ordonné par l'inclusion, est évidement inductif. Il possède donc un élément maximal ; un tel élément s'appelle arbre maximal de Γ.

Corollaire 1.17. *Soit Λ un arbre maximal d'un graphe Γ connexe non vide. Alors Λ contient tous les sommets de Γ.*

Démonstration. On suppose que non. On peut alors trouver un sommet P de Γ qui n'est pas dans Λ et une arête y reliant P à Q dans Λ. Mais le graphe Δ obtenu par adjonction du sommet P et des arêtes y, $\overline{y}$ serait un arbre par $1.16, 3.$, ce qui contredit la maximalité de Γ d'où le résultat.

$\square$

References

[1] Jean-Pierre Serre, *Arbres, amalgames, SL_2.*

[2] A. Raghuram and B. Sury, *Groups acting on trees.* Notes of a course given at the Indian Institute of Technology in Guwahati, India, December 2002. http://www.isibang.ac.in/sury/tree.pdf