Université de Caen
2017-2018

Notes sur la

Théorie de Serre-Bass

par

Ndèye Coumba SARR

1 Arbres

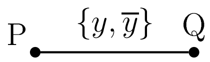
1.1 Graphes

Définition 1.1 (Graphe)**.** Un **graphe** Γ est la donnée :

1. d'un ensemble de **sommets** $X = \mathrm{som}\Gamma$;
2. d'un ensemble d'**arêtes** $Y = \mathrm{ar}\Gamma$;
3. et de deux applications
$$Y \to X \times X, \quad y \mapsto (o(y), t(y))$$
et
$$Y \to Y, \quad y \mapsto \overline{y}$$
qui satisfont à la condition suivante : pour tout $y \in Y$, on a $\overline{\overline{y}} = y$, $\overline{y} \neq y$, et $o(y) = t(\overline{y})$.

Un graphe est généralement représenté par un diagramme. Les sommets sont représenté par un point et une ligne correspond à un ensemble d'arêtes de la forme $\{y, \overline{y}\}$.

Exemple 1.2 (à parfaire)**.** Le graphe ayant deux sommets P et Q et deux arêtes y et $\overline{y}$, avec $P = o(y)$ et $Q = t(y)$ est représenté par le dessin.



Définition 1.3 (Morphisme de graphe)**.** Soient deux graphes Γ et Γ'. On appelle **(homo)morphisme de graphe** de Γ dans Γ' toute application f : $\mathrm{som}\Gamma \to \mathrm{som}\Gamma'$ qui envoie les sommets de Γ sur ceux de Γ' telle que : $\forall\ [P, Q] \in \mathrm{ar}\Gamma$, $[f(P), f(Q)] \in \mathrm{ar}\Gamma'$, et pour tout $y\mathrm{ar}\Gamma$ f(o(y))=o(f(y)) ; f(t(y))=t(f(y)) ; $f(\overline{y}) = \overline{f(y)}$.

Les graphes munis des morphismes de graphes forment un catégorie au sens de la théorie des catégorie.

Définition 1.4 (Orientation ; graphe orienté)**.** Une **orientation** d'un graphe est une partie Y_+ de $Y = \mathrm{ar}\Gamma$ telle que Y soit réunion disjointe de Y_+ et de $\overline{Y}_+$. Il est existe toujours. Un **graphe orienté** est défini, à isomorphisme près, par la donnée de deux ensembles X et Y_+ et d'une application $Y_+ \to X \times X$.

Réalisation d'un graphe

Soit $\Gamma = (X, Y)$ un graphe. Formons l'espace topologique T somme disjointe de X et de $Y \times [0, 1]$, où X et Y sont munis de la topologie discrète. Soit R la relation d'équivalence la plus fine sur T pour laquelle $(y, t) \equiv (\overline{y}, 1 - t)$, $(y, 0) \equiv o(y)$ et $(y, 1) \equiv t(y)$ pour $y \in Y$ et $t \in [0, 1]$. L'espace quotient $\mathrm{real}(\Gamma) = T/R$ s'appelle la réalisation du graphe Γ.

Définition 1.5 (Chemin)**.** Soit $n \geq 0$ un entier. Considérons le graphe orienté Ch_n donné par la concaténation d'arêtes $[i, i+1]$, $0 \leqslant i < n$, avec $o([i, i+1]) = i$ et $t([i, i+1]) = i+1$.
Il a $n+1$ sommets $0, 1 \cdots, n$ et n arêtes.
On appelle **chemin** de longueur n dans un graphe Γ tout morphisme $c : \mathrm{Ch}_n \to \Gamma$.

Définition 1.6 (connexité)**.** Un graphe est dit **connexe** si deux sommets quelconques sont les extrémités d'au moins un chemin. Les sous-graphes connexes maximaux (pour la relation d'inclusion) s'appellent les composantes connexes du graphe.

Définition 1.7 (Circuit)**.** Soit $n \geq 1$ un entier. Considérons le graphe orienté Cir_n donné par la concaténation d'arêtes $[i, i+1]$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $o([i, i+1]) = i$ et $t([i, i+1]) = i+1$. L'ensemble de sommets est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On appelle **circuit** de longueur n dans un graphe tout sous-graphe isomorphe à Cir_n.
Un tel graphe est défini par un chemin $(y_1, \cdots, y_n)$ sans aller-retour tel que les $P_i = t(y_i)$ $(1 \leq i \leq n$ soient distincts, et tel que $P_n = \mathrm{o}(1)$.

Un circuit de longueur 1 s'appelle un **lacet**.

Graphes combinatoires Soit Z un CW-complexe de dimension 1, alors on peut naturellement lui associer un graphe en prenant les 0-cellules comme les sommets et les 1-cellules comme l'ensemble des paires d'arêtes. Clairement, ce graphe n'a pas de circuits de longueur 1 ou 2. Ce complexe Z s'appelle la **réalisation géométrique** du graphe correspondant. Les extrémités d'une y détermine l'ensemble $\{y, \overline{y}\}$. Donc pour toute arête y, on peut considérer la paire d'arêtes $\{y, \overline{y}\}$ comme étant une arête géométrique.

Définition 1.8 (graphe combinatoire)**.** Un graphe est dit **combinatoire** s'il ne possède pas de circuit de longueur plus petite ou égale à 2.

Lemme 1.9. *Un graphe est un graphe combinatoire si et seulement si il est isomorphe à un graphe qui provient d'un CW-complexe de dimension 1.*

Démonstration. Si un graphe est isomorphe à un graphe qui ne possède pas de circuit de longueur 1 ou 2 alors le graphe d'origine lui même possède la même propriété. Pour un tel graphe, on peut considérer la réalisation géométrique correspondante comme étant l'ensemble X des sommets du graphe (les 0-cellules), et 1-cellules comme évidemment l'ensemble des parties $\{P, Q\}$ où P et Q sont liés ou $P = Q$. $\square$

Le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$
Soit G un groupe et soit S une partie de G. On note $\Gamma(G, S)$ le graphe orienté ayant G pour ensemble de sommets, $G \times S = (\mathrm{ar}\Gamma)_+$ pour orientation, avec

$$\mathrm{o}(g, s) = g \text{ et } \mathrm{t}(g, s) = gs, \text{ pour toute arête } (g, s) \in G \times S.$$

La multiplication à gauche par les éléments de G définit une opération de G sur Γ qui conserve l'orientation. De plus G opère librement sur les sommets et les arêtes.

Proposition 1.10. *Soit $\Gamma(G, S)$ le graphe défini par un groupe G et une partie S de G.*

i. *Γ est connexe si et seulement si S engendre G.*

ii. Γ *contient un lacet si et seulement si* 1 *appartient à* S.

iii. Γ *est un graphe combinatoire si et seulement si* $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

Démonstration. i. ($\Rightarrow$) Supposons Γ connexe. Soit g quelconque dans G alors il existe un chemin c de Ch_n dans Γ, d'extrémités l'élément neutre e_G de G et g, i.e. $c(0) = e_G$ et $c(n) = g$. Dans ce cas $g = c(n) = s_1 s_2 \cdots s_n$. D'où G est bien engendré par S.
($\Leftarrow$) On suppose que $G = \langle S \rangle$. Soient g et g' deux sommets quelconques de Γ. On a un chemin c_1 d'origine e_G et de somme terminal g et on a aussi un autre chemin c_2 de g' à $e - G$. La concaténation de ces deux chemins nous donnent bien un chemin de g à g'

ii. Γ contient un lacet alors il existe un sous-graphe Γ' isomorphe à Cir_1. Notons α cet isomorphisme, α envoie 0 sur le sommet g de Γ'. Si (g, s) est l'arête de Γ' avec $s \in S$ alors $g = gs$, d'où $s = 1$.

□

References

[1] Jean-Pierre Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2.

[2] A. Raghuram and B. Sury, *Groups acting on trees.* Notes of a course given at the Indian Institute of Technology in Guwahati, India, December 2002. http://www.isibang.ac.in/sury/tree.pdf