UNIVERSITE DE CAEN
LMNO
6 avril 2010

Physique des particules et invariance de jauge

C. LONGUEMARE

Quelques repères historiques

[1] électricité :	Coulomb - Ampère	1827
	Faraday-Maxwell	1861
[2] électron - photon :	JJ Thomson	1897
	Planck	1900
[3] proton - neutron - neutrino	Rutherford	1910 & 1919
	Chadwick	1932
	Pauli - Fermi	1932
[4] positron - anti-proton	Anderson	1936
	Segré	1955

Rayons cosmiques .... 500 TeV

Accélérateurs .... 5 TeV $\quad TeV = 10^{12}\ eV$

Quantique et Relativiste

[1] quantique : $\hbar \quad 6,582\ 10^{-22}\ MeV.s \quad \hbar = 1$

[2] relativiste : $c \quad 2,99792458\ 10^{8}\ m/s \quad c = 1$

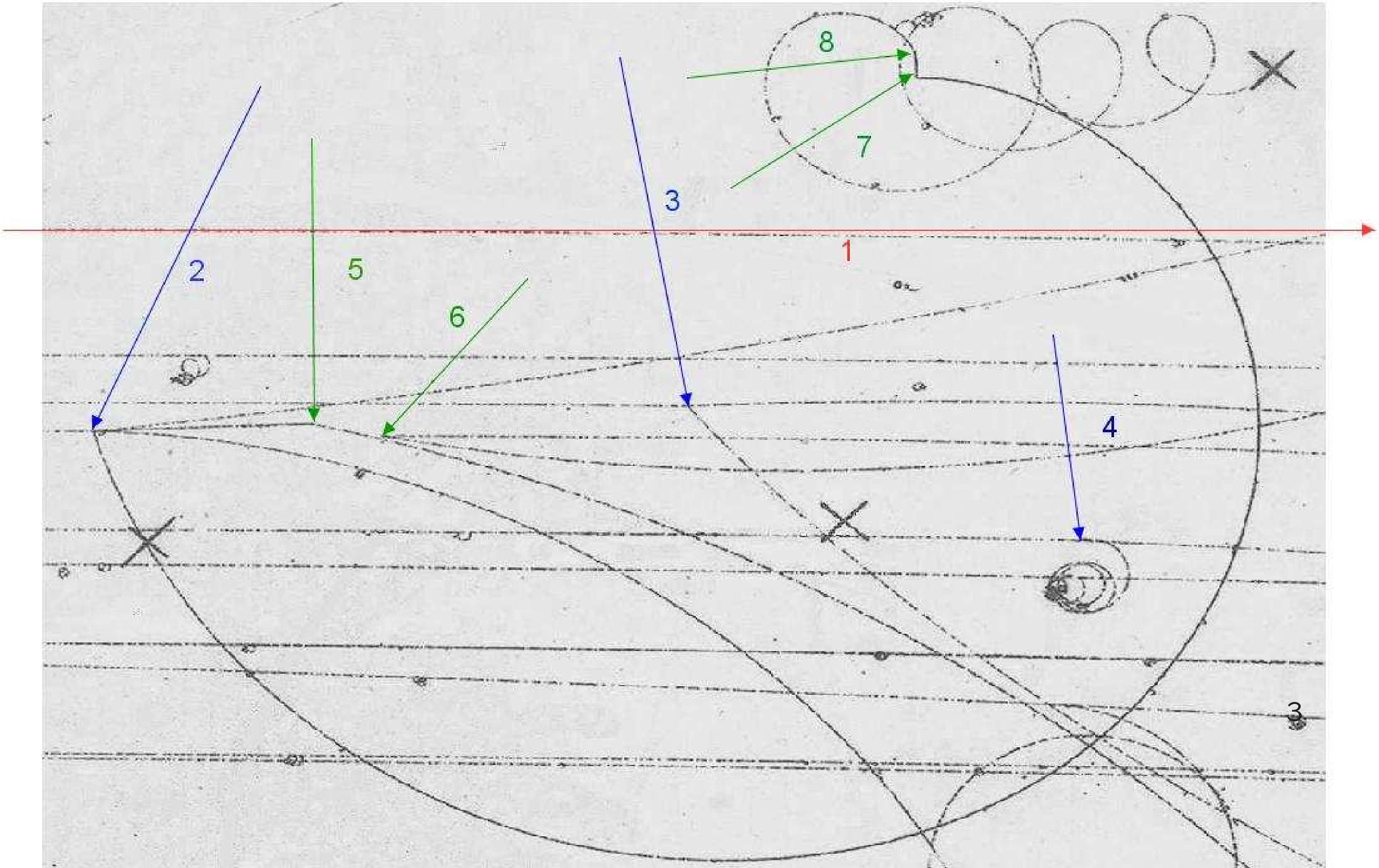
L'énergie d'une particule libre

$$E^2 \;=\; p^2 + m^2 \qquad \text{ou} \qquad E^2 - p^2 \;=\; m^2$$

La limite non-relativiste, avec une interaction

$$E \;=\; \frac{p^2}{2m} + m + U$$

$K^{-} + p$ (15 GeV)



Particules et interactions

[1] les interactions :

	portée	couplage
Gravitation	∞	$\sim 10^{-20}$
Electromagnétiques	∞	10^{-2}
faibles	$10^{-16}\ cm$	10^{-2}
fortes	$10^{-13}\ cm$	1

[2] classification des particules (du modèle standard) :

	spin	EM et faible	forte
fermions	1/2	leptons et quarks	quarks
bosons	0 ou 1	W, Z, γ	g

Electromagnétisme classique

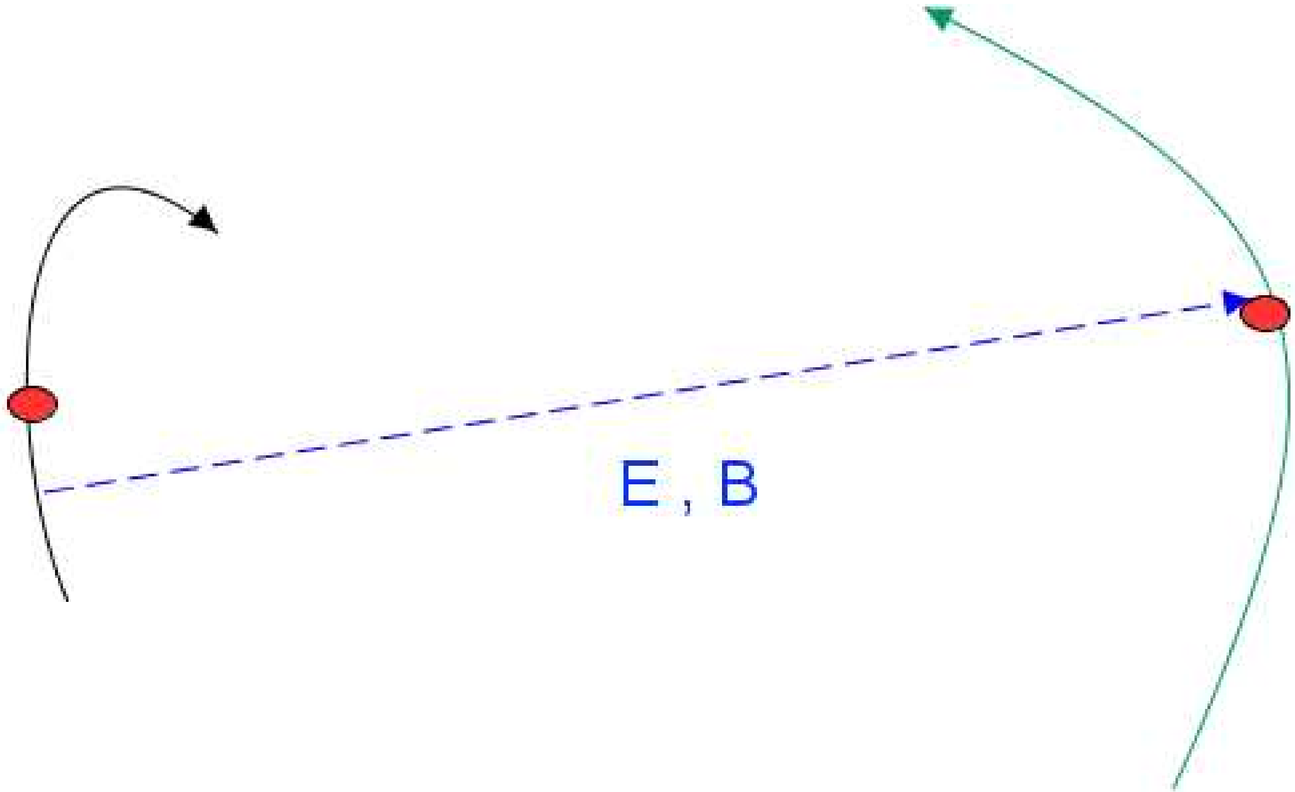
Le mouvement classique :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

l'action classique : $$d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

la force électromagnétique de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$


E , B

Equations de Maxwell : rayonnement du champ E, B

$$D = \epsilon_0 \; E \qquad div(D) = \rho$$

$$H = \mu_0^{-1} B \qquad rot(H) = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$B \qquad div(B) = 0 \qquad B = rot(A + grad(\alpha))$$

$$E \qquad rot(E) + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad E + \frac{\partial A}{\partial t} = -grad(V - \frac{\partial \alpha}{\partial t})$$

remarques

[1] $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$

[2] les charges sont électriques ; pour passer aux charges magnétiques ?

$$E \to B \qquad B \to -E$$

Equations relativistes avec $g_{\mu\nu} = 1, -1, -1, -1$

Le potentiel électromagnétique

$$A_\mu\ (x) \text{ une fonction définie dans } R^4$$

Le tenseur associé au champ de force

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu \qquad \leftrightarrow \qquad \tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ F^{\rho\sigma}$$

$$\partial^\mu\ (\tilde{F}_{\mu\nu}) = 0\ [a]$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = (\epsilon_0)^{-1} \mathcal{J}_\nu \quad [b]$$

$$m\ \frac{dV_\mu}{d\tau} = (F_{\mu\nu}.\ \mathcal{J}^\nu) = q\ (F_{\mu\nu}.\ V^\nu) \qquad [c]$$

L'invariance de jauge classique : $F_{\mu\nu}$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

Le lagrangien $\mathcal{L}_{EM}$ et le principe de moindre action

$$\mathcal{A} \;=\; \int \mathcal{L}\; dt$$

En principe : l'action $\mathcal{A}$ est minimum entre un état initial et final physiquement acceptables.

La particule libre $\mathcal{L}_0 \;=\; -m\sqrt{1-v^2} \qquad = \; -\; p_\mu \; dx^\mu$

Le champ libre $\mathcal{L}'_0 \;=\; -\frac{\epsilon_0}{4} \quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad +\frac{m^2}{2}\; A^\mu A_\mu$

L'interaction $\mathcal{L}_{int} \;= -q\; A_\mu\; v^\mu \qquad = \; -q\; A_\mu\; dx^\mu$

Les équations de Lagrange - Euler avec $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}_{int} \rightarrow \text{ Eqs de Maxwell avec } m^2 = 0$$

Le lagrangien est invariant de jauge

Le changement de jauge :

$$A_\mu \ \to A_\mu \ + \partial_\mu \alpha$$

1 Le photon est de masse nulle

$$m = 0$$

2 Prescription pour construire l'interaction

$$p_\mu \to p_\mu + q \ A_\mu$$

L'action est stable car $\quad \delta \mathcal{A} \ = -q \ \int \partial_\mu \alpha \ dx^\mu \ = -q \ [\alpha]_i^f \ = Cte$

La formulation quantique

L'onde électromagnétique $\nu = \frac{c}{\lambda}$ $\longrightarrow$ photon $e = h\nu$

relation de Planck

La particule ponctuelle $p = mv$ $\longrightarrow$ onde $\lambda = \frac{h}{p}$

relation de de Broglie

Les fonctions d'ondes

$$\psi(x) \ \sim \ < x \mid \psi > \in \ C \qquad prob \ = \ \mid \psi(x) \mid^2$$

photons et vecteurs : $A_\mu(x) \quad W_\mu(x)$ ...

fermions : spineur $\psi_i(x)$

scalaires : $B(x)$

Les opérateurs

quantité de mouvement : $p = -i\frac{\partial}{\partial x}$ soit $p_\mu \ = \ i\partial_\mu$

Les états propres avec valeur propre p

$\psi(x) \ \sim \ \exp(ip\ x)$ soit $\sim \exp(-i\ p^\mu x_\mu)$

QED : l' électromagnétisme quantique

L'électron est représenté par un champ de spineurs (spin 1/2 $\times$ 2) de Dirac tel que

$$\psi(x) \text{ est la fonction d'onde quantique}$$

associée à une densité de courant de charges électroniques ($q = e$)

$$\mathcal{J}_\mu = e\, \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

Le champ électromagnétique est classique

$$A_\mu(x) \rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{i}{e}[i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu]$$

La densité de lagrangien dans l'espace temps est :

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi - \frac{\epsilon_0}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A^\mu\mathcal{J}_\mu$$

QED : l'interaction

L'interaction électron-photon est construite en utilisant le principe d'interaction minimal (minimal coupling)

$$p_\mu \;=\; i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu \;-\; e\;A_\mu$$

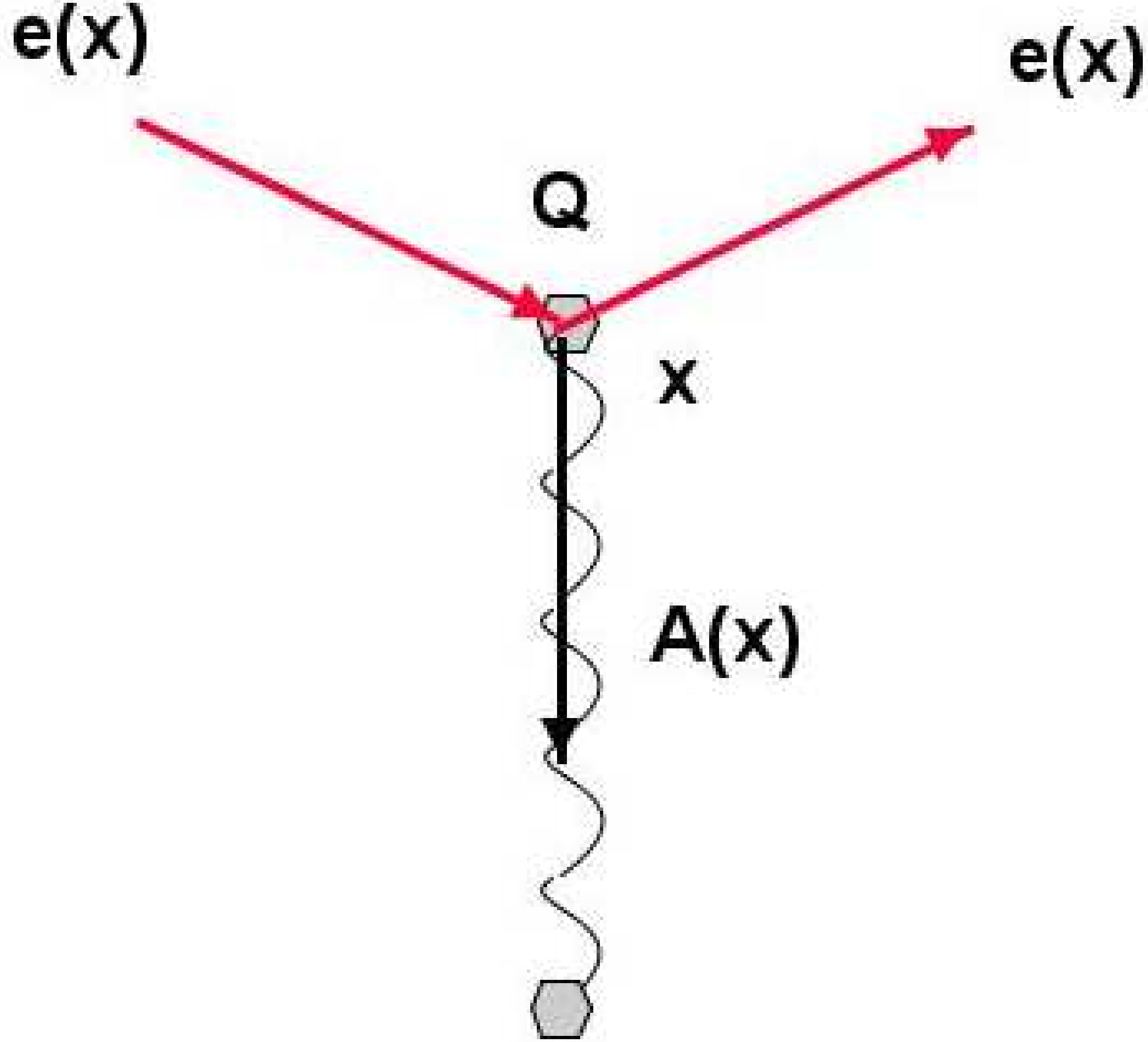
$$\text{ou} \qquad \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu \;+\; ie\;A_\mu$$

Le lagrangien d'interaction s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{int}(x) \;=\; -e\;A^\mu(x)\;\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

• Le lagrangien complet avec **un champ relativiste** de spin 1/2 (électrons) et le champ A_μ (photons) :

$$\mathcal{L}(x) \;=\; -\frac{1}{4}\;\; F_{\mu\nu}.\; F^{\mu\nu} + \;\bar{\psi}\{\gamma_\mu(i\partial \;-\; eA)^\mu \;-m\}\psi \qquad (1)$$


e(x)
e(x)
Q
x
A(x)

L'invariance de jauge locale U(1) de QED

La transformation de jauge agit sur les champs laissant la dynamique invariante.

$$\psi(x) \rightarrow \text{ exp } (-ie\alpha(x))\ \psi(x)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow \ A_\mu(x)\ +\ \partial_\mu\ \alpha(x)$$

1. La transformation de phase **locale** sur ψ engendre un groupe de transformations unitaires continu commutatif agissant sur les champs de particules chargées.

   $$U\ =\ \text{exp}(\ -ie\ \alpha(x))$$

   Le générateur du groupe de Lie est la charge électrique $Q = \ e$

2. L'existence de cette symétrie est associée à la conservation de la charge électrique.

Généralisation à SU(2) : Yang-Mills

Un fermion est représenté par un champ à plusieurs états (internes) tel que

$$\psi(x) \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{exemple} \quad \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

La transformation SU(2) locale agit sur les états internes.

$$\psi(x) \rightarrow \; exp(-ig\; T_j\; \alpha_j(x))\; \psi(x) \tag{2}$$

1. La transformation engendre un groupe unitaire continu non-commutatif.
2. Les générateurs du groupe de Lie sont les T_j avec $j = 1, 2, 3$.

$$T_j \;=\; \frac{1}{2}\sigma_j$$

3. g est la constante de couplage.

Yang-Mills : l'interaction

L'interaction fermion-boson est construite en utilisant le principe d'interaction minimal : dérivation covariante

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu \;= \partial_\mu \;+\; ig\; T_j \; W_{j\mu}(x) \tag{3}$$

Le lagrangien d'interaction s'écrit alors

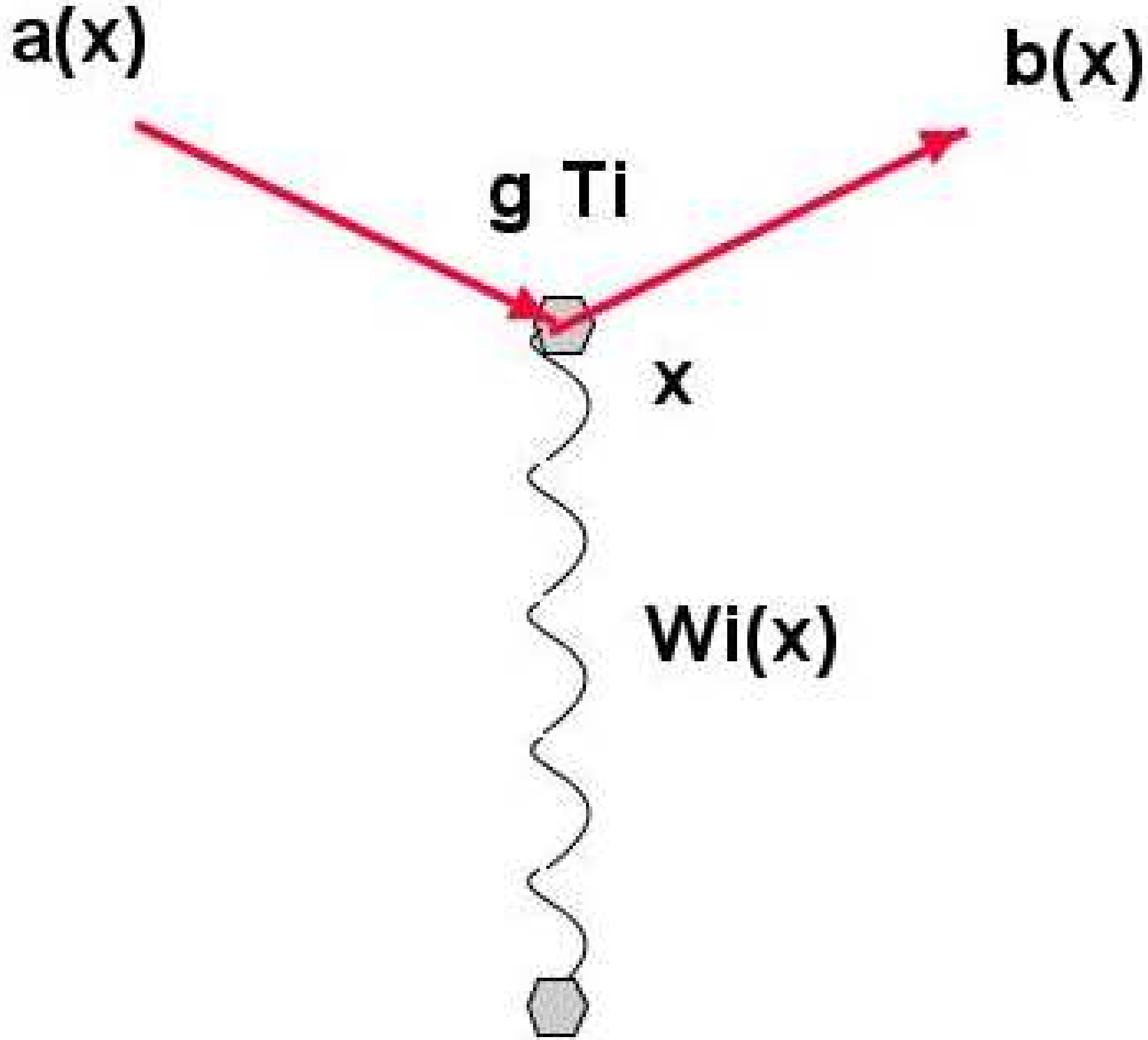
$$\mathcal{L}_{int}(x) \;=\; -\; g\; W_j^\mu(x)\; \bar{\psi}(x)\; \gamma_\mu\; T_j \psi(x)$$

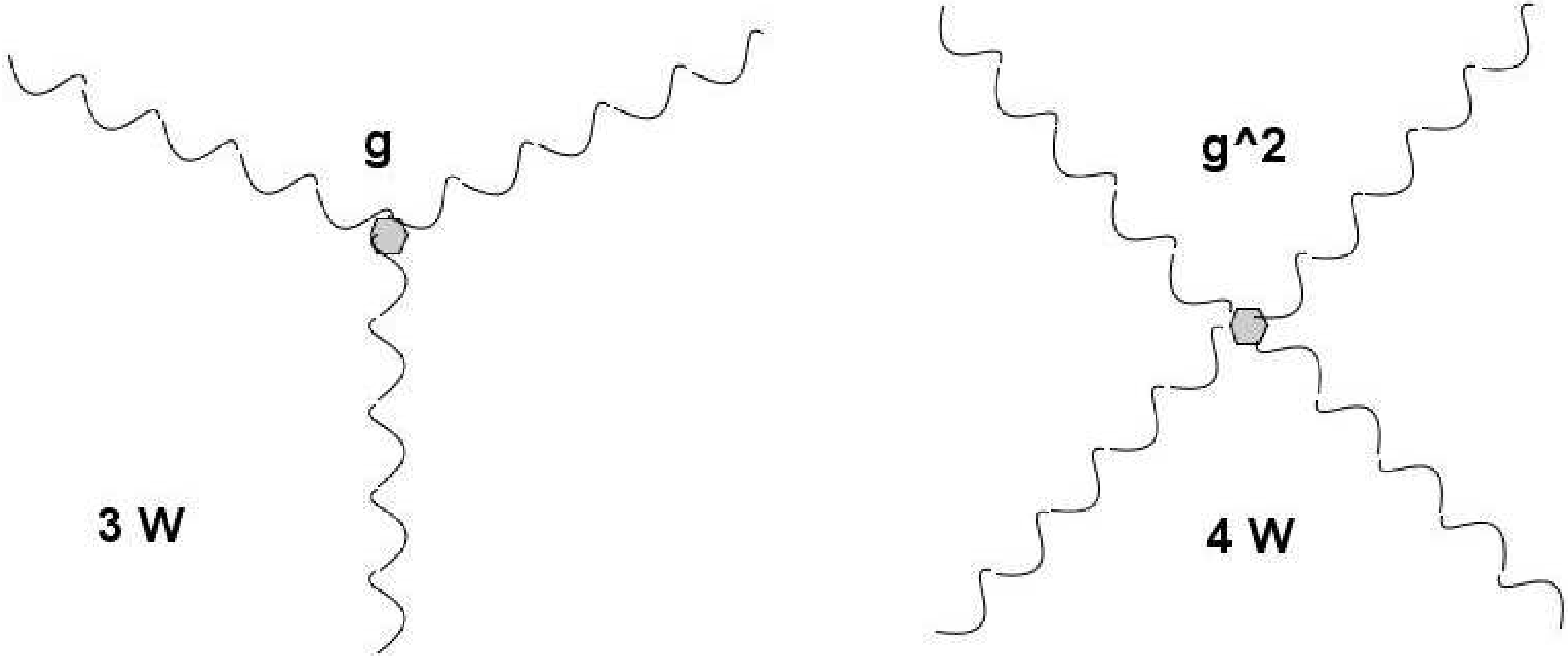
Le Lagrangien total des fermions et des bosons

$$\mathcal{L}_{tot} \;=\; -\frac{1}{4}\Big(\; G_a^{\mu\nu}\; G_{\mu\nu a}\Big) + \bar{\psi}\;\; \Big(\Big(i\partial^\mu - g \;\; T_j\; W_j^\mu\Big)\,\gamma_\mu \;\; - m\;\Big)\,\psi$$

g est l'unique constante de couplage

$$G^{\mu\nu} \;=\; \frac{i}{g}\;[\; i\mathcal{D}_\mu, \;\; i\mathcal{D}_\nu] \sim \partial W + gW.W$$


a(x)
b(x)
g Ti
x
Wi(x)


g
3 W
g^2
4 W

L'unification électrofaible

1. La symétrie SU(2)*U(1).
2. Les constantes de couplage g et g' $\sim 10^{-2}$
3. La masse des W $M_W \sim 10^2\ GeV$ et le Higgs ? ?.
4. La violation de parité : $\psi_L \neq \psi_R$

L'interaction forte

1. La symétrie SU(3) cachée.
2. La constante de couplage α .
3. Le confinement

Conclusion

1. La grande unification , exemple SU(5) .

$$\psi = \begin{pmatrix} q_c \\ l \end{pmatrix}$$

2. Les aspects quantiques .

3. Les générations ou saveurs .

4. Les neutrinos massifs