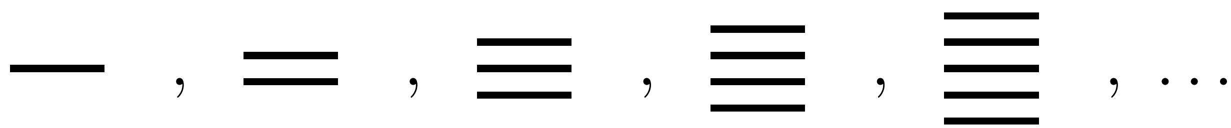
POLYNÔMES DE PLUSIEURS VARIABLES et INTERPOLATION

Alain Lascoux

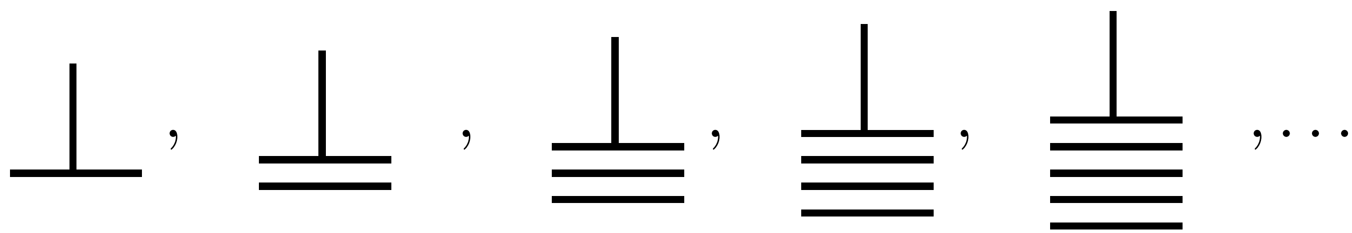
CNRS, Institut Gaspard Monge, Université Paris-Est
Alain.Lascoux@univ-mlv.fr
phalanstere.univ-mlv.fr/∼al

Face à la suite



tout le monde continue

Mais en fait la bonne réponse est, d'après le Yigu yanduan de Li Ye :



La science moderne est censée commencer avec Galileo, qui examine la chute d'une balle lancée de la tour de Pise, et enregistre sa position à des intervalles de temps réguliers :

$$I,\ IV,\ IX,\ XVI,\ XXV,\ XXXVI, \ldots$$

La loi est un peu plus compliquée, mais la philosophie vient à la rescousse:

Quando, dunque, osservo che una pietra, che discende dall'alto a partire dalla quiete, acquista via nuovi incrementi di velocità, perché non dovrei credere che tali aumenti avvengano secondo la pi? semplice e pi? ovvia proporzione? Ora, se consideriamo attentamente la cosa, non troveremo nessun aumento o incremento più semplice di quello che aumenta sempre nel medesimo modo .... quel moto che in tempi eguali, comunque presi, acquista eguali aumenti di velocità.

En d'autres termes, si ce n'est l'incrément d'espace, c'est l'incrément de vitesse qui doit être uniforme.

La méthode permet de devisser toute suite de loi polynômiale, par exemple:

```
ACE> [seq( n^3-2*n+3,n=1..10)];
     [2, 7, 24, 59, 118, 207, 332, 499, 714, 983]
```

Dans ce cas la solution était déjà connue dès le début de l'astronomie: calculer les différences, itérer.

2	7	24	59	118	207	332	499
5	17	35	59	89	125	167	
12	18	24	30	36	42		
6	6	6	6	6			
0	0	0	0				

A partir de la suite finale, et de la première diagonale, on reconstruit (et comprend) la suite originelle.

Mais les fonctionnaires chinois se posaient des problèmes plus sérieux que de lancer des balles d'une tour.

Par exemple, dans le Miroir de Jade des quatre inconnues l'on demande

Un fonctionnaire recrute des soldats suivant les nombres cubiques. Pour commencer, il recrute suivant un cube de 3 pieds de côté. Ensuite, il augmente le cube d'un pied. Ces hommes reçoivent 250 sapèques par jour. 23400 hommes ont été recrutés en tout, qui ont reçu 23462 ligatures d'argent. En combien de jours les a-t-on recrutés?

Notons f(n) le nombre de personnes recrutées le n-ième jour.

n	f(n)	**différence**	**2^e^ différence**	**3^e^ différence**	**4^e^ différence**
0	0				
		$3^3 = 27$ (Δ_1)			
1	27		37 (Δ_2)		
		$4^3 = 64$		24 (Δ_3)	
2	91		61		6 (Δ_4)
		$5^3 = 125$		30	
3	216		91		6
		$6^3 = 216$		36	
4	432		127		
		$7^3 = 343$			
5	775				
…	…				

La quatrième différence étant constante, on aura comme interpolation polynomiale :

$$f(n) = n\Delta_1 + n(n-1)\Delta_2/2! + n(n-1)(n-2)\Delta_3/3! + n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta_4/4!$$

Dans le cas présent, f(n) = 23 400.

On obtient $n = 15$ comme une solution de cette équation.

Issue des problèmes d'interpolation en astronomie, l'« art de la différence pour le recrutement » utilise les différences d'ordre 4.

Ici, le « côté de 3 pieds » n'a rien à voir avec une longueur : les hommes étant recrutés suivant les nombres cubiques, le premier jour, $3^3 = 27$ hommes sont recrutés ; on ajoute ensuite un pied, c'est-à-dire que le deuxième jour, $4^3 = 64$ hommes sont recrutés. La méthode de résolution est introduite par la formule : « *L'art dit* : ». Elle correspond à la formule d'interpolation utilisant les différences d'ordre 4.

La formule d'interpolation inventée sous les Sui par Liu Zhuo s'arrêtait à l'ordre 2 ; dans le *Miroir de jade des quatre inconnues*, elle est

Mais que faire des positions d'une comète, qui ne peut s'observer à des intervalles de temps réguliers ? Cest Newton, lorsqu'il travaillait aux Principia, qui a trouvé comment transformer un ensemble discret de données en une fonction algébrique :

normaliser les différences
en les
divisant
par l'intervalle de temps

Voici la suite précédente, moins trois observations :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & & 7 & & \blacksquare & & 59 & & \blacksquare & & \blacksquare & & 332 \\
& 5 & & \frac{52}{2}=26 & & & & \frac{273}{3}=91 & & & & & & 167 \\
& & \frac{21}{3}=7 & & & \frac{65}{5}=13 & & & & \frac{76}{4}=19 & & & \\
& & & \frac{6}{6}=1 & & & & \frac{6}{6} & & & & & \\
& & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

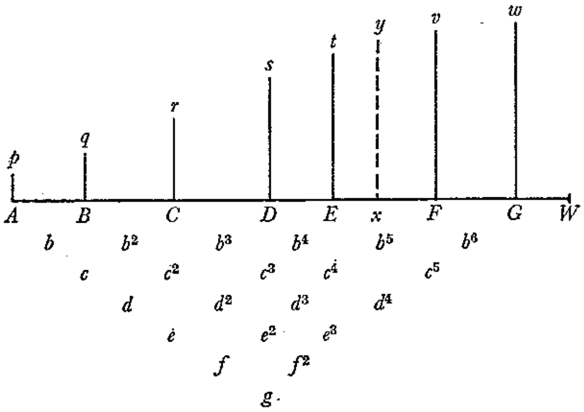
La position $f(t)$ de la comète, connue aux temps $t_0, t_1, \ldots$ est alors, d'après Newton :

$$f(t) = f(t_0) + f^{\partial}(t - t_0) + f^{\partial\partial}(t - t_0)(t - t_1) + \cdots$$

avec les coefficients f^{∂}, $f^{\partial\partial}, \ldots$ obtenus par la méthode ci-dessus.

vel semper decrescant. Hoc modo per bisectionem procedi potest usqꝫ dum[30] differentiæ quartæ minores sint quam 32.[31]

Possent aliæ hujusmodi regulæ tradi sed mallem rem omnem una regula generali complecti et ostendere quomodo series quævis in loco imperato intercalari[32] possit. Exponatur series per lineas Ap, Bq, Cr, Ds, Et, Fv, Gw &c ad



lineam AG perpendiculariter erectas & intervalla terminorum per partes lineæ illius AB, BC, CD, DE &c.[33] Fac $\frac{A-B}{AB}=b$, $\frac{B-C}{BC}=b^2$, $\frac{C-D}{CD}=b^3$ &c. Item $\frac{b-b^2}{\frac{1}{2}AC}=c$, $\frac{b^2-b^3}{\frac{1}{2}BD}=c^2$, $\frac{b^3-b^4}{\frac{1}{2}CE}=c^3$ &c. Dein $\frac{c-c^2}{\frac{1}{3}AD}=d$, $\frac{c^2-c^3}{\frac{1}{3}BE}=d^2$, $\frac{c^3-c^4}{\frac{1}{3}CF}=d^3$ &[c]. Porro $\frac{d-d^2}{\frac{1}{4}AE}=e$. $\frac{d^2-d^3}{\frac{1}{4}BF}=e^2$ &c. Tunc $\frac{e-e^2}{\frac{1}{5}AF}=f$ [&c] et sic in sequentibus usqꝫ ad ad finem operis, dividendo semper differentias primas per intervalla terminorum quorum sunt differentiæ, secundas per dimidium duorum intervallorum quibus respondent, tertias per tertiam partem trium & sic porrò pergendo usqꝫ dum in ultimo loco differentia satis exigua sit.[34] Hoc peracto capiantur tum terminorum tum differentiarum primæ A, b, c, d, e, f, g &c. Sit differentiarum illarum numerus n,[35] locus quem intercalare oportet x, terminus intercalaris xy, et regrediendo ab ultima differentia puta g et ab ultimo terminorū ex quibus differentia illa colligebatur puta G, fac $f+\frac{g\times Gx}{n}=p$. $e+\frac{p\times Fx}{n-1}=q$. $d-\frac{q\times Ex}{n-2}=r$. $c-\frac{r\times Dx}{n-3}=s$. $b-\frac{s\times Cx}{n-4}=t$. $A-\frac{t\times Bx}{n-5}=v$,[36] pergendo semper juxta tenorem progressionis

(30) An unfinished first continuation reads 'præcedentes reg[ulæ applicari possint?]' (the preceding rules [can be applied?]).

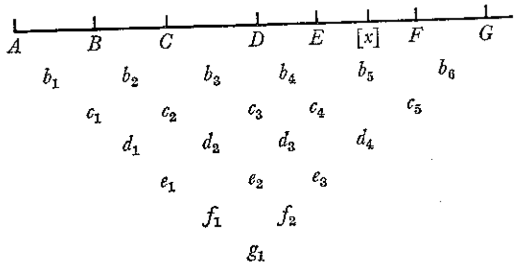
(31) Read '21' (compare note (20) above). This paragraph essentially repeats Rule 6 of the preceding piece (see §2: note (34)).

(32) As we would expect (see §2: note (16)) Newton first wrote 'interpolari' (interpolated). The subsequent alteration is bewildering.

(33) Newton has cancelled a following passage, inserting its equivalent below: 'sintqꝫ terminorum differentiæ per intervalla terminorum quibus respondent divisæ[,] primæ quidem b, b^2, b^3, &c, secundæ c, c^2, c^3, &c, tertiæ d, d^2, d^3 &c[,] quartæ e, e^2, e^3 &c & sic ad ultimas. Hoc est.' Observe in sequel that the end-points A, B, C, D, ... of the lines Ap, Bq, Cr, Ds, ... are used to denote their magnitude. The end-point W of the line ABC ... apparently denotes

always decrease in a regular way. In this manner a bisection procedure may be employed until[30] the fourth differences prove to be less than 32.[31]

Other rules of this kind might be presented, but I would prefer to embrace everything in one single general rule and show how any series you wish may be intercalated[32] in any place commanded. Let the series be exhibited by the lines Ap, Bq, Cr, Ds, Et, Fv, Gw, ... raised at right angles to the line AG, and the intervals of the terms by the parts AB, BC, CD, DE ... of that line.[33] Make



$\dfrac{A-B}{AB}=b_1$, $\dfrac{B-C}{BC}=b_2$, $\dfrac{C-D}{CD}=b_3$, ...; likewise $\dfrac{b_1-b_2}{\frac{1}{2}AC}=c_1$, $\dfrac{b_2-b_3}{\frac{1}{2}BD}=c_2$, $\dfrac{b_3-b_4}{\frac{1}{2}CE}=c_3$, ...; next $\dfrac{c_1-c_2}{\frac{1}{3}AD}=d_1$, $\dfrac{c_2-c_3}{\frac{1}{3}BE}=d_2$, $\dfrac{c_3-c_4}{\frac{1}{3}CF}=d_3$, ...; further $\dfrac{d_1-d_2}{\frac{1}{4}AE}=e_1$, $\dfrac{d_2-d_3}{\frac{1}{4}BF}=e_2$, ...; then $\dfrac{e_1-e_2}{\frac{1}{5}AF}=f_1$, ..., and so on in sequel till the work is finished, dividing always first differences by the intervals of the terms whose differences they are, second ones by half of the two corresponding intervals, third ones by a third of the three corresponding and so forth until the difference in the final place be slight enough.[34] When this is accomplished, take the leading quantities both of the terms and the differences, A, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, ..., and let those differences be n in number,[35] the place it is required to intercalate call x, the term to be intercalated xy; then, going backwards from the last difference, say g_1, and from the last of the terms, say G, from which that difference was gathered, make $f_1+g_1\times\dfrac{Gx}{n}=p$, $e_1+p\times\dfrac{Fx}{n-1}=q$, $d_1-q\times\dfrac{Ex}{n-2}=r$, $c_1-r\times\dfrac{Dx}{n-3}=s$, $b_1-s\times\dfrac{Cx}{n-4}=t$, $A-t\times\dfrac{Bx}{n-5}=v$,[36] proceeding always following the sense of

---

the last 'known' quantity to be interpolated (X, Y and Z being inappropriate for the purpose, in context at least).

(34) In continuation Newton first wrote 'puta non major unitate' (suppose not greater than a unit), then replacing it by the unfinished phrase 'puta minor sit quam' (suppose it less than...). A following cancelled amplification at this point reads 'Nam cum b, b^2, b^3 &c respondeant medijs[,] interstare supponantur e regione mediorum punctorum inter A, B, C, D, &c et c, c^2, c^3 &c e regione mediorum punctorum inter b, b^2, b^3, &c. Distantia terminorum b & b^2[,] existens summa distantiarum hinc inde a B, erit $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC$. [&c]' (For since b_1, b_2, b_3, ... correspond to means, let them be supposed to stand between in line with the mid-points between A, B, C, D, ..., and c_1, c_2, c_3, ... in line with the mid-points between b_1, b_2, b_3, ... The distance of the terms b_1 and b_2, being the sum of their distances either way from B, will then be $\frac{1}{2}(AB+BC)$, [and so on].)

(35) Below (and in Newton's diagram) n is taken equal to 6.

La méthode de Newton implique un calcul multivarié, quoique la fonction étudiée soit une fonction d'une variable. En effet les variables sont les temps $t_1, t_2, \ldots$ et au temps n, on a une fonction de $t_1, \ldots, t_{n+1}$.

En termes algébriques: On part d'une fonction de $x_1, x_2, \ldots$ (une fonction de x_1 est une fonction multivariée de degré nul en $x_2, x_3, \ldots$!) et pour chaque paire x_i, x_{i+1}, on définit un

opérateur sur les polynômes (une différence divisée) :

$$f \to \; f\partial_i := \frac{f(\ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots) - f(\ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots)}{x_i - x_{i+1}}$$

et on itère.

La formule de Newton sécrit maintenant

$$f(t) = f(x_1) + f\partial_1(t - x_1) + f\partial_1\partial_2(t - x_1)(t - x_2) + \cdots$$

les opérateurs agissant sur leur gauche.

C'est bien la version discrète de la formule de Taylor

$$f(t + \epsilon) = f(t) + f'\epsilon + (f''/2)\epsilon^2 + (f'''/6)\epsilon^3 + \cdots\ ,$$

la formule de Newton étant d'ailleurs plus simple à interpréter, puisqu'il suffit de spécialiser en $x_1, x_2, x_3, \ldots$ successivement pour voir apparaître la loi.

L'interpolation générale fait appel aux différences divisées ou à des déformations $T_1, T_2, \ldots$ agissant sur les polynômes en x_i. Chaque T_i agit sur x_i, x_{i+1} seulement, et commute avec la multiplication par les fonctions symétriques en x_i, x_{i+1}. Il suffit donc de définir son action sur la base $1, x_{i+1}$ puisque chaque polynôme peut s'écrire $f_1 + x_{i+1} f_2$, avec $f_1, f_2 \in \mathfrak{Sym}(x_i, x_{i+1})$. Voici 5 exemples de tels opérateurs, avec des polynômes leur correspondant :

1	1	0	1	1	t
x_{i+1}	x_i	-1	0	$x_i+x_{i+1}-1$	x_i
	$\mathfrak{S}_n$	*Schubert*	*Demazure*	*Grothendieck*	*Macdonald*

On a des opérateurs, il faut aussi choisir les points d'interpolation (c'est-à-dire des vecteurs de longueur n).

On note les monômes exponentiellement :

$$\{x^v = x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n} : v \in \mathbb{N}^n\}.$$

L'espace des polynômes en n variables a pour base les monômes $\{x^v : |v| = v_1 + \cdots + v_n \leq d\}$.

On va définir deux autres bases (triangulaires, mais pas pour le même ordre), Schubert et Macdonald, en exigeant que chacun des éléments de la base s'annule en tous les points d'interpolation, sauf un.

Si les points d'interpolation sont suffisamment génériques, en ajoutant des conditions de normalisation, on aura bien ainsi deux bases.

Schubert $\{Y_v : v \in \mathbb{N}^n\}$ & Macdonald $\{M_v : v \in \mathbb{N}^n\}$.

Les points d'interpolation sont appeleés vecteurs spectraux :

$\langle v \rangle$ (les composantes sont des variables y_j, Schubert),

$\langle v \rangle$ (les composantes sont du type $t^i q^j$, Macdonald).

Définition: Y_v et M_v sont les seuls polynômes de degré $|v|$ tels que

$$Y_v(\langle u \rangle) = 0 \text{ et } M_v(\langle u \rangle) = 0,$$

$$\text{pour chaque } u : \ |u| \leq |v|, \ u \neq v \ \ ,$$

plus conditions de normalisation

On a imposé un nombre de conditions égal à la dimension de l'espace, pas de surprise à l'existence de tels polynômes. Mais c'est le choix des points d'interpolation (les vecteurs spectraux) qui fait toute la beauté et la puissance de la théorie !

Voyons quels sont les points d'interpolation dans le cas Schubert. On a besoin d'une bijection entre permutations et vecteurs d'entiers, le code d'une permutation: Etant donnée $\sigma \in \mathfrak{S}_N$, son code v est la suite des nombres d'inversions dues à $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, i.e.

$$v_i := \#\{j : j > i \,\&\, \sigma_i > \sigma_j\}.$$

Alors, on pose

$$\langle v \rangle = [y_{\sigma_1}, y_{\sigma_2}, y_{\sigma_3}, \ldots,]$$

i.e. au lieu de v, on prend la permutation dont v est le code. Par exemple

$$v = [2, 3, 0, 1, 0] \leftrightarrow \sigma = [3, 5, 1, 4, 2]$$

Comme normalisation, on choisit les inversions de la permutation, i.e. on exige que

$$Y_v\big(\langle v\rangle\big) = \Cap(v) := \prod_{i<j,\, \sigma_i>\sigma_j} (y_{\sigma_i} - y_{\sigma_j})$$

Par exemple, $\sigma = [3, 5, 1, 4, 2]$ a pour code $v = [2, 3, 0, 1, 0]$ et

$$\Cap(v) = (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)(y_5 - y_1)(y_5 - y_4)(y_5 - y_2)(y_4 - y_2)$$

Supposons que l'on connaisse Y_v, avec $v_i > v_{i+1}$.

Alors on en déduit Y_u, avec
$u = [v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i{-}1, \ldots, v_n]$.

On s'aperçoit que les conditions imposées à Y_v et Y_u en $\langle v \rangle$ et $\langle u \rangle$ impliquent que Y_u est l'image de Y_v par la différence divisée ∂_i.

Ce sont bien les différences divisées qui fournissent la récurrence sur les polynômes de Schubert.

Il faut se donner en outre les points initiaux. Dans le cas v dominants, i.e. $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n$, on pose

$$Y_v = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{v_i} (x_i - y_j)$$

Comme c'est un produit de facteurs linéaires, les propriétés de Y_v sont faciles à vérifier dans ce cas.

Pour $v \in \mathbb{N}^n$, soit ∂^v un produit de différences divisées tel que $Y_v \partial^v = Y_{0\ldots 0}$. Alors, pour tout autre Y_u, soit $Y_u \partial^v$ est soit nul, soit égal à Y_w, avec $w \neq [0\ldots 0]$. Cette observation élémentaire suffit à étendre l'interpolation de Newton au cas de plusieurs variables.

Théorème. Pour tout $f \in \mathfrak{Pol}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, on a

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{v \in \mathbb{N}^n} f(\mathbf{x}) \partial^v \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} Y_v \,.$$

Preuve: il suffit de tester l'énoncé sur la base Schubert. Comme on spécialise en $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \langle 0 \ldots 0 \rangle$, il ne subsiste de la somme qu'un seul terme $Y_{0\ldots 0}(\langle 0 \ldots 0 \rangle) = 1$.

Il nous faut définir de nouveaux vecteurs spectraux pour les polynômes de Macdonald.

Lorsque $\lambda \in \mathbb{N}^n$ est dominant, le vecteur spectral $\langle \lambda \rangle$ est $[t^{n-1}q^{\lambda_1}, \ldots, t^0 q^{\lambda_n}]$. Sinon, si $v = \lambda\sigma$ (σ minimale), on définit $\langle v \rangle = \langle \lambda \rangle \sigma$.

Par exemple, $\langle 3, 3, 0 \rangle = [q^3 t^2, q^3 t^1, q^0 t^0]$, $\langle 3, 0, 3 \rangle = [q^3 t^2, q^0 t^0, q^3 t^1]$, $\langle 0, 3, 3 \rangle = [q^0 t^0, q^3 t^2, q^3 t^1]$.

(on a toutes les puissances q^{v_i}, l'ordre sur $t^0, t^1, \ldots$ correspondant à la standardisation de v).

Au lieu des différences divisées, on utilise l'algèbre de Hecke qui agit par $1T_i = t$, $x_{i+1}T_i = x_i$.

Mais les T_i ne suffisent pas, il faut une opération affine. On prend un ensemble infini de variables x_i en posant $x_{i+rn} = q^r x_i$, avec q un deuxième paramètre. De même $v \in \mathbb{N}^n$ se comprend comme un vecteur infini avec $v_{i+rn} = v_i + r$, $r \in \mathbb{Z}$.

On a maintenant une translation τ et son inverse $\bar{\tau} = \tau^{-1}$:

$$\tau : \; x_i \to x_{i+1} \;\; , \;\; v_i \to v_{i+1}$$

Définition. Le polynôme de Macdonald M_v, $v \in \mathbb{N}^n$ est le seul polynôme de degré $|v|$ tel que

$$
\begin{aligned}
M_v(\langle u \rangle) &= 0\,,\ u \neq v,\ |u| \leq |v| \\
M_v &= x^v q^{-\sum_i \binom{v_i}{2}} + \cdots
\end{aligned}
$$

L'existence et l'unicité des ces polynômes est prouvée en étudiant la compatibilité des conditions d'annulation avec l'action de T_i ou de τ.

On écrit $M_v = f + x_{i+1} g$, avec $f, g \in \mathfrak{Sym}(x_i, x_{i+1})$. Comme $M_v(\langle v \rangle s_i) = 0$, $M_v(\langle v \rangle) \neq 0$, il existe une constante unique c telle $T_i + c$ échange les deux spécialisations :

$$M_v \rightarrow F := tf + x_i g + c(f + x_{i+1} g)$$

$$\text{et} \qquad F(\langle v \rangle s_i) \neq 0,\ F(\langle v \rangle) = 0\,.$$

Au final :

$$\boxed{M_{vs_i} = M_v \left(T_i + \frac{t-1}{\langle v \rangle_{i+1} {\langle v \rangle_i}^{-1} - 1} \right)}$$

L'opération affine n'est pas plus compliquée à suivre. Le polynôme $M_v \bar{\tau}$ hérite des annulations de M_v. Mais $v = [v_1, \ldots, v_n] \to v\tau = [v_2, \ldots, v_n, v_1{+}1]$ augmente le degré, $M_v \bar{\tau}$ a plus d'annulations à satisfaire, et celles ci sont données par un facteur linéaire.

Au total

$$\boxed{M_{v\tau} = M_v\, \bar{\tau}\, (x_n - 1)}$$

Par exemple,

$$M_{053}(x_1, x_2, x_3) = M_{205}(x_3/q, x_1, x_2)\, (x_3 - 1)$$

Les polynômes de Macdonald sont donc définis par des récurrences élémentaires. Il reste à s'en servir ! Beaucoup de domaines non encore explorés. Par exemple, avec Ole Warnaar, nous donnons des généralisations multivariées de nombreuses séries hypergéométriques :

Règle du jeu: interpréter x_n comme un polynôme de Macdonald pour un alphabet de cardinal 1.

Par exemple, dans la transformation de Heine:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,b)_k}{(q,c)_k}\, x^k = \frac{(c/a, ax)_\infty}{(c,x)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a, abx/c)_k}{(q, ax)_k} \left(\frac{c}{a}\right)^k$$

ou la formule de Kummer–Thomae–Whipple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,b,c)_k}{(q,d,e)_k} \left(\frac{f}{a}\right)^k = \frac{(e/a,f)_\infty}{(f/a,e)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,d/b,d/c)_k}{(q,d,f)_k} \left(\frac{e}{a}\right)^k,$$

(trouver qui est x !),

ou bien encore la transformation de Jackson

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,b)_k}{(q,c)_k} x^k = \frac{(ax)_\infty}{(x)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-bx)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{(a,c/b)_k}{(q,c,ax)_k}.$$