POINTS RATIONNELS DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES SUR LES CORPS FINIS

MICHEL BRION

Etant donnée une variété algébrique X définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, on peut considérer les points rationnels de X sur une extension arbitaire $\mathbb{F}_{q^n}$. D'après des résultats de Weil, Grothendieck et Deligne, le nombre de ces points vérifie

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = \varepsilon_1\, \alpha_1^n + \cdots + \varepsilon_r\, \alpha_r^n$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ sont des signes, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont des nombres algébriques dont la valeur absolue est une puissance entière positive de $q^{1/2}$.

L'exposé présentera ces résultats, puis ceux d'un travail en commun avec E. Peyre où nous avons considéré les variétés homogènes, c'est-à-dire telles qu'il existe un groupe algébrique G défini sur $\mathbb{F}_q$ et opérant dans X de sorte que l'opération de $G(\overline{\mathbb{F}_q})$ sur $X(\overline{\mathbb{F}_q})$ soit transitive.

On peut se ramener au cas où G est soit une variété abélienne, soit un groupe algébrique linéaire. Dans le second cas, nous montrons que les α_i sont des produits de racines de l'unité par des puissances entières positives de q. Autrement dit, $|X(\mathbb{F}_{q^n})|$ est un "polynôme périodique" en q^n. De plus, le polynôme périodique "décalé", obtenu en remplaçant formellement q^n par $q^n + 1$, a tous ses coefficients positifs.