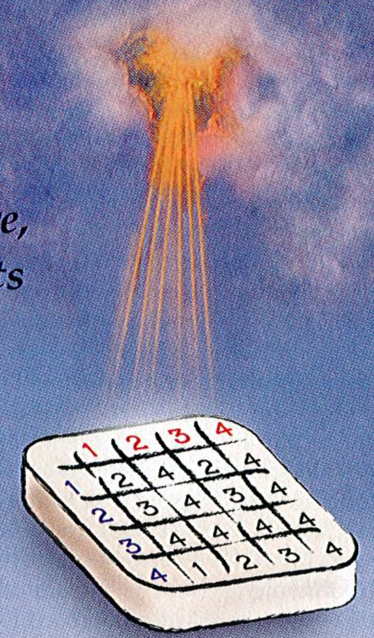
L'infini est un révélateur

PATRICK DEHORNOY

L'infini est source d'inspiration. L'exploration d'ensembles hyperinfinis, impossibles à construire, mais pas inconcevables, a fait découvrir des objets mathématiques comme les tables de Laver et des propriétés des tresses.



Les tables de Laver sont des tableaux d'entiers dont les propriétés restent très mystérieuses, alors même qu'il est facile de les construire avec un ordinateur. Le plus étrange est que le peu que nous sachions sur ces tables repose sur l'hypothèse indémontrable qu'il existe des ensembles "hyperinfinis". Cela illustre un nouveau type d'applications de l'infini en mathématiques, où celui-ci sert à fournir des intuitions plus que des démonstrations.

Opérations autodistributives

Les tables de Laver ont été découvertes dans les années 1980 par Richard Laver, théoricien des ensembles de l'Université de Boulder, au Colorado.

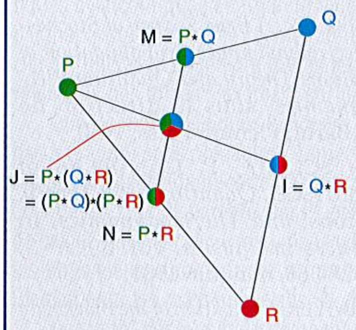
A côté d'opérations usuelles comme l'addition ou la multiplication, qui vérifient des lois simples comme la commutativité ($x * y = y * x$) ou l'associativité ($x * (y * z) = (x * y) * z$), les mathématiciens étudient d'autres opérations qui vérifient des lois plus exotiques.

Parmi celles-ci figure l'autodistributivité, qui s'exprime par l'égalité $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$, et que nous noterons AD : le nom indique qu'une opération vérifiant la condition AD est distributive par rapport à elle-même, de la même façon qu'on dit la multiplication usuelle distributive par rapport à l'addition, parce qu'elle vérifie $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$. Nous appellerons donc opération autodistributive, ou simplement opération AD, une "multiplication" (sur des objets quelconques, pas nécessairement des nombres) qui vérifie la condition AD quels que soient les choix des éléments x, y, z.

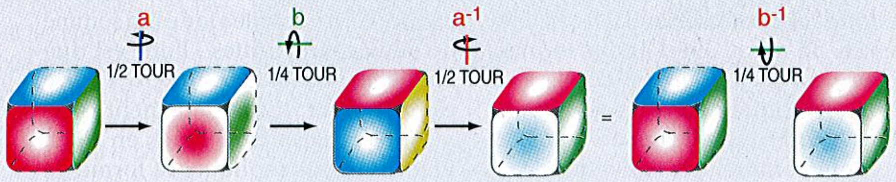
Il n'y aurait guère d'intérêt à choisir des conditions exotiques au hasard et étudier pour le plaisir les opérations qui satisferaient de telles conditions (s'il en existe). L'intérêt pour les opérations AD provient de l'existence d'exemples non triviaux dans le monde mathématique, en liaison notamment avec d'autres structures importantes comme les groupes *(voir l'encadré 1)*.

Le rôle de l'infini dans le domaine tient à ce que la considération d'ensembles «hyperinfinis» a mené à la découverte d'exemples d'opérations AD d'un type complètement nouveau *(voir l'encadré 4)*, lesquelles ont donné un nouvel essor à toute la branche.

1. EXEMPLES D'OPÉRATIONS AUTODISTRIBUTIVES



$$a*b = axbxa^{-1}$$
$$a*(b*c) = a*(bxcxb^{-1}) = axbxcxb^{-1}xa^{-1}$$
$$(a*b)*(a*c) = (axbxa^{-1})*(axcxa^{-1}) = axbxa^{-1}xaxcxa^{-1}x(axbxa^{-1})^{-1}$$
$$= axbxa^{-1}xaxcxa^{-1}xaxb^{-1}xa^{-1} = axbxcxb^{-1}xa^{-1}$$



Dans le plan, on définit le «produit» de deux points P et Q comme étant le milieu du segment PQ. Par le théorème de Thalès, cette opération vérifie la condition d'autodistributivité : P∗(Q∗R) = (P∗Q)∗(P∗R). Un exemple d'opération autodistributive est la conjugaison dans un groupe, notamment un groupe de rotations. Partant de la multiplication x du groupe, on définit une nouvelle opération ∗ en posant $a*b = axbxa^{-1}$. On vérifie que $a*(b*c)$ et $(a*b)*(a*c)$ sont égaux à $abcb^{-1}a^{-1}$. Un exemple de conjugaison de rotations d'un cube est représenté à droite.

Abordons ici la question de la construction d'opérations AD, en nous demandant si on peut construire à la main une opération AD sur un ensemble fini quelconque.

Ceci revient à chercher une sorte de table de Pythagore représentant une «multiplication». Si nous cherchons une table à N éléments, nous pouvons toujours supposer que les éléments de notre table sont les entiers 1, 2, ..., N, et notre problème est de construire un tableau à N lignes et N colonnes rempli de nombres entre 1 et N de sorte que, si nous dénommons $p * q$ le nombre qui est à l'intersection de la p-ième ligne et de la q-ième colonne, alors l'opération $*$ (la «multiplication») ainsi définie vérifie la condition AD. Si cela est le cas, nous dirons que nous avons obtenu une AD-table.

De telles tables existent-elles? Certainement : si nous posons $p * q = q$, c'est-à-dire si nous construisons notre tableau en remplissant la première colonne avec des 1 partout, la deuxième avec des 2, etc., on montre que la condition AD est vérifiée, puisque nous aurons toujours $p * (q * r) = r = (p * q) * (p * r)$.

Tables de Laver

Les tables précédentes ne sont guère passionnantes. Elles sont plus intéressantes quand nous fixons à l'avance les valeurs dans la première colonne.

Supposons que nous fixions les valeurs suivantes :

	1	2	3	N
1	2			
2	3			
3	4			
.				
.				
.				
.				
N-1	N			
N	1			

Nous allons voir qu'il existe au plus une façon de compléter le tableau. Supposons par exemple $N = 4$. Nous partons avec :

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

Essayons de calculer $4 * 2$, c'est-à-dire $4 * (1 * 1)$. Comme nous voulons avoir la condition d'autodistributivité, il faut avoir $4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1)$.

Or $4 * 1$ est 1, donc on doit avoir $4 * 2 = 1 * 1 = 2$ et notre tableau devient :

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

De même, $4 * 3 : 4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3$, ce qui donne :

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

Le lecteur pourra établir de même la valeur $4 * 4 = 4$. On passe alors à la ligne de 3. La première valeur à calculer est $3 * 2$, et il vient cette fois $3 * 2 = 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4$. On remplit ainsi la ligne de 3, puis celle de 2 et de 1, parvenant finalement à :

	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

2. LES PREMIÈRES TABLES DE LAVER À 1, 2, 4, 8 et 16 ÉLÉMENTS

Vérifions que les tables de Laver satisfont la loi d'autodistributivité (condition AD) : $p * (q * r) = (p * q) * (p * r)$. Sur le tableau à 4 éléments, choisissons $p = 4$, $q = 3$ et $r = 2$. Le premier membre est égal à $q * r = 3 * 2 = 8$ et $p * (q * r) = p * 8 = 4 * 8 = 8$. Calculons le second membre : $(p * r) = (4 * 2) = 6$; $(p * q) = (4 * 3) = 7$; $(p * q) * (p * r) = 7 * 6 = 8$. L'égalité est vérifiée. Il est facile de programmer la construction des tables de Laver sur un ordinateur, en suivant l'ordre de calcul des valeurs que nous avons indiqué. En utilisant les propriétés de périodicité pour ne pas garder toutes les valeurs en mémoire, on va jusqu'à la table à 1024 éléments sans problème, voire, en opérant avec soin, jusqu'à 2^{20} éléments.

p \ q	1
1	1

p \ q	1	2
1	2	2
1	1	2

p \ q	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

p \ q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

p \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16
2	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16
3	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16
4	5	6	7	8	13	14	15	16	5	6	7	8	13	14	15	16
5	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16
6	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16
7	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16
10	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16
11	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16
12	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
13	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16
14	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

3. LES LIMITES DE L'EXPÉRIMENTATION

La période de la première ligne atteint 8 dans la table de Laver à 32 éléments, puis 16 dans la table à 512 éléments. Si le théorème de Laver est vrai, il existe des tables où la période de la première ligne vaut 32, et nous pouvons chercher quelle est la taille N de la première table où cela se produit, par exemple en programmant un ordinateur. Cette approche ne risque pas d'aboutir...

En effet, un théorème de Randall Dougherty, de l'université de Columbus, en Ohio, nous dit que le nombre N est au moins $A_9(A_8(A_8(255)))$, où A_k est la k-ième fonction d'Ackermann. Les fonctions A_k sont des fonctions sur les entiers construites de proche en proche, et qui croissent de plus en plus vite : $A_1(n)$ est $n + 1$, $A_2(n)$ est $2n + 3$, $A_3(n)$ est de l'ordre de 2^n, $A_4(n)$ est approximativement une tour d'exponentielles de base 2 et de hauteur n, et, pour tout k, $A_{(k+1)}(n)$ s'obtient en appliquant A_k itérée n fois à 1. Le nombre $A_8(255)$ dépasse toute imagination, et que dire de $A_8(A_8(255))$, puis de $A_9(A_8(A_8(255)))$?

Sans risque d'être démenti, on peut affirmer que, quelle que soit la puissance de l'ordinateur utilisée ou l'astuce du programme développé, on trouvera toujours que la période de la première ligne dans une table de Laver est au plus 16. Pourtant le théorème de Laver nous dit que 32 est atteint, mais certainement bien plus loin que là où les ordinateurs savent encore compter...

La construction est la même pour toutes les tailles de tableau: notre règle du jeu donne à chaque fois une et une seule manière de remplir les cases de la dernière ligne, puis de l'avant-dernière, et ainsi de suite en remontant pour finir par la première ligne. Sont-ce des AD-tables? La construction effectuée garantit un certain nombre des égalités $p * (q * r) = (p * q) * (q * r)$, mais, en fait, seulement celles qui correspondent au cas particulier $r = 1$, car on se ramène toujours au cas précédemment calculé.

Pour les autres nombres du tableau, rien n'est garanti. La situation est alors la suivante: si la taille du tableau est une puissance de 2, alors le tableau que nous avons construit est bien une AD-table, sinon, ce n'en est pas une. Ainsi, pour chaque entier n, nous avons obtenu une AD-table de taille 2^n, et c'est cette table qui est dénommée la n-ième table de Laver.

En dépit de la simplicité de leur construction, les tables de Laver sont des objets très compliqués et encore mal compris: en particulier, personne ne connaît de formule donnant explicitement la valeur du produit $p*q$ dans la n-ième table de Laver, et il est fort douteux qu'une telle formule existe!

Lignes et périodes

Néanmoins, nous observons certaines propriétés sur les exemples de l'encadré 1 (et sur les exemples supplémentaires que le lecteur aura programmés sur son ordinateur...), qui ont été démontrées en toute généralité par Richard Laver, et par Ales Drapal, un mathématicien de l'université Charles de Prague.

Nous citerons ici deux propriétés importantes. La première est que chaque table s'obtient simplement à partir des tables plus grandes: par exemple, nous obtiendrons la table à 8 éléments à partir de la table à 16 éléments en gardant le quart supérieur gauche et en «projetant modulo 8» les valeurs, c'est-à-dire en gardant les valeurs entre 1 et 8, et en retranchant 8 aux valeurs entre 9 et 16. La correspondance est la même à chaque niveau: la table à 16 éléments s'obtient à partir de la table à 32 éléments en projetant modulo 16, etc.

La seconde propriété concerne les lignes des tables. Dans la n-ième table (celle qui a 2^n éléments), par hypothèse, la p-ième ligne (en partant du haut) commence par la valeur $p * 1 = p + 1$. Ensuite, le long de la ligne, les valeurs augmentent jusqu'à atteindre la valeur maximale 2^n, à la suite de quoi on retrouve la valeur $p + 1$ et toutes les valeurs précédentes, de façon périodique. Par exemple, dans la table à 8 éléments, les valeurs successives sur la deuxième ligne sont 3, 4, 7, 8, 3, 4, 7, 8: il y a 4 valeurs différentes, et nous dirons que la période de la ligne est 4. Ainsi, dans chaque table de Laver, chaque ligne a une certaine période, dont nous savons qu'elle est elle-même nécessairement une puissance de 2: par exemple, dans la table à 8 éléments, les périodes des lignes 1 à 8 sont, respectivement, 4, 4, 2, 4, 2, 2, 1, et 8.

Le théorème de Laver

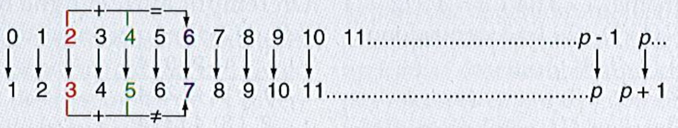
Intéressons-nous spécialement à la période de la première ligne. Nous lisons sur les exemples de l'encadré 2 que les valeurs pour les 5 premières tables sont 1, 1, 2, 4, et 4. Si le lecteur a programmé les tables suivantes, il trouvera ensuite les valeurs 8, 8, 8, 8, 16, et 16 pour les tables à 32, 64, 128, 256, 512 et 1 024 éléments.

Qu'observons-nous? Que ces valeurs vont en croissant, plus exactement en ne décroissant pas. Cela était prévisible, car nous savons que la n-ième table s'obtient en projetant modulo $2n$ la n + 1-ième, et s'il y a m valeurs distinctes sur la première ligne de cette n + 1-ième ligne, il y en a au plus m sur la première ligne de la n-ième table.

4. ENSEMBLES HYPERINFINIS ET RANGS AUTOSIMILAIRES

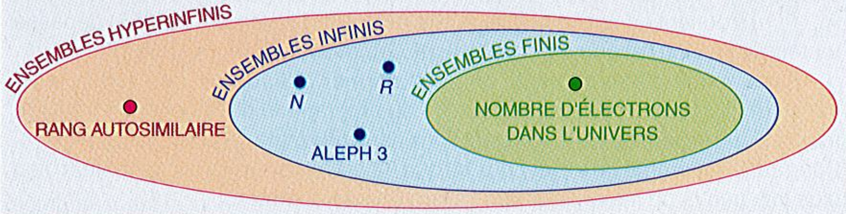
Un ensemble infini est, par définition, un ensemble tellement grand qu'il a des sous-ensembles aussi grands que lui. Par exemple, l'ensemble N des nombres entiers est infini, car la fonction qui envoie chaque entier n sur l'entier $n + 1$ établit une correspondance bijective entre N et le sous-ensemble de N constitué des entiers non nuls.

La théorie moderne des ensembles fait jouer un rôle fondamental à diverses extensions de la notion d'infini mettant en jeu ce qu'on peut appeler des ensembles hyperinfinis (on les dénomme aussi «grands cardinaux»). Un rang autosimilaire est un exemple de tel ensemble. L'idée est de repartir de la définition ci-dessus de l'infini, mais de la renforcer en demandant que la correspondance entre l'ensemble considéré X et l'un de ses sous-ensembles conserve toutes les structures additionnelles existant sur X. Reprenant l'exemple de la correspondance $n \rightarrow n + 1$



entre N et un de ses sous-ensembles, nous voyons que cette correspondance conserve l'ordre des entiers ($p < q$ entraîne bien $p + 1 < q + 1$) ;en revanche, elle ne conserve pas l'addition ($p + q = r$ n'entraîne pas $(p + 1) + (q + 1) = r + 1$...). Les mathématiciens ont montré qu'il n'existe aucune correspondance sur N qui puisse convenir, et donc N, qui est infini, n'est pas hyperinfini au sens précédent. C'est cette notion forte d'infini qu'on dénomme autosimilarité et, donc, N n'est pas autosimilaire.

Pour élaborer de façon convenable une théorie des ensembles autosimilaires (s'il en existe), le contexte de la théorie des ensembles suggère d'utiliser des ensembles d'un type particulier appelés rangs. L'existence d'un rang autosimilaire est l'un des axiomes d'hyperinfini que la théorie des ensembles étudie depuis les années 1970. Le lien avec les tables de Laver vient du fait qu'on peut construire à partir d'un rang autosimilaire une certaine opération AD (dont les tables de Laver sont des projections finies) : c'est ainsi que Laver a, pour la première fois, introduit les tables qui, aujourd'hui, portent son nom.



Nous voyons aussi que les périodes doublent parfois. Sans qu'une loi apparaisse clairement sur un aussi petit nombre de valeurs, il apparaît plausible que la suite des périodes tende vers l'infini, c'est-à-dire atteigne successivement toutes les puissances de 2 (il est facile de voir que les périodes ne peuvent faire plus que doubler d'une table à la suivante, donc on ne peut sauter aucune puissance de 2). Qu'en est-il?

En 1995, Richard Laver a prouvé le théorème suivant : «S'il existe un rang autosimilaire, alors la suite des périodes des premières lignes des tables de Laver tend vers l'infini.»

L'encadré 4 explique la notion de rang autosimilaire. Ce résultat est très étonnant : que la suite des périodes tende vers l'infini ne nous surprend guère, c'est ce que l'observation des exemples suggérait. Ce qui est surprenant ici est l'hypothèse avec laquelle Laver démontre son résultat, à savoir cette mystérieuse existence d'un rang autosimilaire. Cette hypothèse d'un rang autosimilaire exprime qu'il existe dans le monde mathématique des ensembles énormes, «hyperinfinis».

D'après le théorème d'incomplétude de Gödel, il n'existe aucun espoir de montrer que de tels ensembles existent, ni même de montrer que l'hypothèse qu'ils existent est non contradictoire. Ce qui est extrêmement surprenant alors, c'est l'apparition d'un lien entre les tables de Laver, qui sont des objets finis, calculables par ordinateur, et qui existent donc au sens le plus concret, et des ensembles hyperinfinis dont personne ne sait, ni ne saura jamais, s'ils existent.

Une alternative

La situation actuelle ne traduit que notre ignorance des propriétés des tables de Laver. Deux issues sont possibles:
– soit quelqu'un finit par trouver une "vraie" démonstration du théorème de Laver, c'est-à-dire une démonstration qui n'utilise pas l'existence d'un ensemble hyperinfini,
– soit on finit par démontrer que toute preuve utilise comme hypothèse cette existence de façon incontournable.

Si la seconde issue est la bonne, la situation serait comparable à celle du théorème de Goodstein, une propriété des entiers dont on sait qu'on ne peut pas la démontrer sans une certaine forme d'infini (voir *L'infini est-il nécessaire*, page 102) ; une distinction importante néanmoins est que l'hypothèse utilisée dans la preuve du théorème de Goodstein est l'existence d'un infini minimal, alors que celle utilisée dans la preuve du théorème de Laver est l'existence d'un infini extraordinairement plus grand.

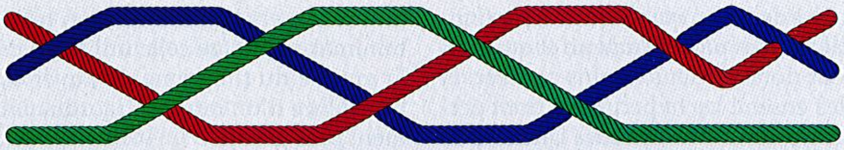
En théorie, rien n'empêche que cette issue soit la bonne (c'est même l'espoir de beaucoup de théoriciens des ensembles et de spécialistes de l'infini). Il semble cependant que la première issue ait bien davantage de chances d'être la bonne, même si les efforts pour démontrer «à la main» le théorème de Laver ont été jusqu'à présent infructueux ou, plus exactement, incomplets.

Applications de l'infini?

Dans la situation actuelle, le théorème de Laver est une application de la notion d'infini, puisque la seule démonstration que nous en connaissions y fait

5. L'ORDRE DES TRESSES

L'existence des tables de Laver et le théorème sur les périodes ne sont pas les seules applications de l'existence d'un rang autosimilaire. Une autre application a été la découverte de l'ordre des tresses. Les tresses mathématiques sont des diagrammes avec des brins qui se croisent, sur le modèle suivant :



Les tresses jouent un rôle important, car elles apparaissent dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique, en liaison notamment avec la théorie des nœuds et, de là, avec une grande variété de problèmes en physique, en chimie ou en biologie (voir *La science des nœuds*, Dossier hors série *Pour la Science*, avril 1997). On a également proposé récemment plusieurs applications à la cryptographie.

En 1992, un ordre remarquable sur les tresses a été découvert. Il a permis notamment de construire un nouvel algorithme de comparaison de tresses plus rapide que tout ce qui était connu auparavant.

Ce qui nous intéresse ici est la façon dont a été découvert cet ordre. Le point de départ est l'étude des rangs autosimilaires par Laver à la fin des années 1980 : comme mentionné dans l'encadré 4, cette étude amène naturellement à une certaine AD-table, et Laver, en 1989, a montré que cette table est sans cycle, ce qui signifie qu'on ne peut pas y trouver des éléments x_1, ..., x_n tels que chaque x_i apparaît dans la ligne de x_{i+1} et x_1 apparaît dans la ligne de x_n. Or on savait à l'époque que l'existence d'une seule opération AD sans cycle était importante pour l'étude de la condition AD en général, tout en n'ayant aucune raison de penser qu'un tel objet doive exister. Le théorème de Laver ne montrait pas vraiment cette existence, puisqu'il supposait lui-même l'existence indémontrable d'un ensemble hyperinfini, mais, au moins, il montrait qu'elle était plausible, et, du coup, suggérait qu'une construction directe devait être possible. Cette indication a été confirmée, et, de surcroît, elle a mené à des applications insoupçonnées: c'est la construction, sans l'aide d'un ensemble hyperinfini d'une opération AD sans cycle, qui a naturellement amené à considérer des tresses et à les ordonner d'une façon que personne n'avait imaginée auparavant. Ainsi, il n'y a aucun lien direct entre les tresses et les ensembles hyperinfinis, si ce n'est que les premières ont été utilisées pour remplacer les seconds. Il n'empêche que, sans les ensembles hyperinfinis, nous en saurions aujourd'hui moins sur les tresses.

appel. S'il apparaît un jour une nouvelle démonstration qui ne l'utilise plus, le théorème cessera-t-il pour autant d'en être une application? En un sens strict, peut-être, puisque ni l'énoncé ni la nouvelle preuve n'utiliseront l'infini.

Mais, en fait, il me semble qu'il s'agira toujours d'applications: quoi qu'il arrive, c'est l'utilisation de l'infini qui aura permis de découvrir le théorème, et il est plus que probable que personne n'aurait eu ni l'occasion ni la curiosité d'en chercher une démonstration si l'étude des rangs autosimilaires n'avait pas d'abord fourni un argument décisif, même fondé sur un principe indémontrable. C'est déjà ce qui s'est passé, il y a quelques années, avec l'ordre des tresses *(voir l'encadré 5)*, et aussi avec les tables de Laver elles-mêmes, d'abord déduites de l'existence d'un rang autosimilaire, puis, ensuite, reconstruites à la main en suivant la méthode que nous avons décrite ici.

Il est tentant de comparer ici la contribution de la théorie des ensembles hyperinfinis avec celle de la physique: se fondant sur des intuitions venues des modèles concrets, les physiciens proposent fréquemment des formules sans les démontrer rigoureusement ou, plutôt, en en donnant une première justification qui néglige des problèmes tels que divergence d'intégrales ou de séries (penser, par exemple, aux intégrales de Feynman). Il appartient alors aux mathématiciens de trouver d'autres démonstrations, complètes et rigoureuses. La situation est semblable lorsque des ensembles hyperinfinis permettent de deviner et de justifier des propriétés comme l'existence des tables de Laver ou le théorème sur les périodes: comme précédemment, il reste ensuite à trouver d'autres démonstrations, libérées des hypothèses indémontrables.

Dans les deux cas, les contributions de la physique et de l'hyperinfini sont essentielles, car, sans elles, les propriétés n'auraient probablement pas été imaginées. Ces applications de l'infini sont d'un type nouveau en mathématiques: l'infini y sert de révélateur pour deviner des propriétés nouvelles, avant de disparaître ultérieurement lorsque sont trouvées les «bonnes» démonstrations.

L'existence de telles applications est un argument puissant en faveur de l'étude de l'infini (et de la théorie des ensembles) : elle montre que, même si l'on est tenté par une approche strictement constructiviste des mathématiques (voir l'article d'Allan Calder dans ce numéro) ou simplement si l'on ressent la plus grande méfiance et fort peu d'intérêt pour les ensembles infinis, et, *a fortiori*, hyperinfinis, on doit reconnaître à ces derniers la capacité de mener à la découverte de nouvelles propriétés des objets finis.

Notons que, de ce point de vue, il importe peu que l'existence des ensembles infinis considérés soit plus ou moins plausible, puisque ceux-ci ont vocation à disparaître du paysage final: on peut même s'attendre à ce que les objets les plus puissants en termes d'applications soient les moins plausibles, comme ces étranges rangs autosimilaires et autres ensembles hyperinfinis que nous avons rencontrés dans cet article et qui se sont déjà révélés fructueux.

Patrick DEHORNOY est professeur de mathématiques à l'université de Caen.

P. DEHORNOY, *Braids and self-distributivity*, Progress in Math., vol. 192, Birkhaüser, 2000.

J.-P. DELAHAYE, *Les grands cardinaux*, in *Pour la science*, n° 224, pp. 60-67, juin 1996.

R. DOUGHERTY, *Critical points in an algebra of elementary embeddings*, in *Ann. P. Appl. Logic*, n° 65, pp. 211-241, 1993.

C. KASSEL, *L'ordre de Dehornoy sur les tresses*, Séminaire Bourbaki, exposé 865, novembre 1999.

R. LAVER, *On the algebra of elementary embeddings of a rank into itself*, in *Advances in Math.*, n° 110, pp. 334-346, 1995.